Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 8 de Fevereiro de 2007

Primeira Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

1. Considere, para cada $k \in \mathbb{R}$, a matriz

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Para que valores de k a matriz A_k é invertível.

[1.0] (b) Para $k = 1$ determine a inversa de A_k.

Mude de Folha

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + \alpha y + \beta w = 2 \\ y + \beta z + 2w = -2 \\ 2x + \alpha y + \beta w = \alpha. \end{cases}$$

[1.5] (a) Discuta o sistema em função de α e β.

[1.0] (b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Mude de Folha

3. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 2w \wedge z = 0\} \text{ e } G = \langle (1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, -1), (3, -2, 1, 2) \rangle.$$

[1.0] (a) Prove que F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

[1.0] (b) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de F.

[1.0] (c) Determine uma base de $F \cap G$.

[1.0] (d) Averigúe se $F \cup G$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Justifique.

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 8 de Fevereiro de 2007

Segunda Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

4. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(e_1) = u_1 - u_2$, $f(e_2) = u_1 + u_3$, $f(e_3) = 2u_1 - u_2 + u_3$ e $f(e_4) = 3u_1 - u_2 + 2u_3$.

[1.0] (a) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

[1.0] (b) Sabendo que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}; b.c._{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

determine $\mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B}')$, onde $b.c._{\mathbb{R}^4}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

[1.0] (c) Escreva o vector $f(0, -1, -3, 2)$ como combinação linear dos vectores u_1, u_2 e u_3.

[1.0] (d) Averigúe se f é sobrejectiva.

Mude de Folha

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Determine:

[1.0] (a) Os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Os subespaços próprios de A.

[0.5] (c) Se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz $P \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, invertível, e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

6. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Sejam $\mathcal{R}_1$ a recta que passa pelo ponto $A = (1, 2, 0)$ e tem a direcção do vector $u = (3, 0, 3)$ e $\mathcal{R}_2$ a recta que passa pelos pontos $B = (1, 2, 1)$ e $C = (3, 2, -1)$.

[1.0] (a) Calcule o ângulo entre os vectores directores das rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

[1.0] (b) Determine o plano $\mathcal{P}$ que contém as rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

Mude de Folha

[2.0] **7.** Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E de dimensão finita. Prove que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

no caso em que $F \nsubseteq G$, $G \nsubseteq F$ e $F \cap G \neq \{0_E\}$.

`Sugestão`: Comece por considerar $(w_1, \ldots, w_t)$ uma base de $F \cap G$ e amplie essa sequência a bases de F e G.

Fim