Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

TESTE A

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $AB = I_2$.
- B A é invertível e $A^{-1} = B$.
- C $AB \neq BA$.
- D $A(BA) = A$.

2. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e w:

$$(S)\begin{cases} x + y + z + \alpha w = 0 \\ \alpha x + 2y + \alpha z + \alpha^2 w = 1 \\ \beta x + \beta y + \alpha z + (\beta\alpha) w = -1 \\ x + y + z + (\alpha + \beta - 3)w = \alpha + \beta \end{cases} .$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $\alpha = \beta$, o sistema é impossível.
- B Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é a única solução do sistema.
- C Para $\alpha = -3$ e $\beta = 3$, $(-\frac{11}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0)$ é a única solução do sistema.
- D Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, a matriz simples do sistema é invertível.

3. Sejam $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = 3w\}$ e $G = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 3), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $\dim F = 2$.
- B $(6, -1, -2, -1) \in G$.
- C $(2, 1, 0, 0) \in F \cap G$.
- D $\dim G = 4$.

Continua no verso desta folha

4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -6$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6.$

B $\det(-A) = -\det A$.

C $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12.$

D A é invertível e $|A^{-1}| = 6$.

5. Considere um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,0,0)$ e $C = (0,1,0)$ e ainda o vector $u = (0,-1,2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A As equações $y = 0 \wedge x - 1 = 1 - z$ são equações cartesianas da recta AB.

B Uma equação geral do plano que contém os pontos A, B e C é $x + 2y + z - 2 = 0$.

C O volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u é 4.

D Os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u são complanares.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

TESTE B

1. Sejam $F = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = 3w\}$ e $G = \langle (2,1,0,0), (0,2,1,3), (0,0,0,1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim G = 4$.

B $(6,-1,-2,-1) \in G$.

C $\dim F = 2$.

D $(2,1,0,0) \in F \cap G$.

2. Considere um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,0,0)$ e $C = (0,1,0)$ e ainda o vector $u = (0,-1,2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u é 4.

B Uma equação geral do plano que contém os pontos A, B e C é $x + 2y + z - 2 = 0$.

C Os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u são complanares.

D As equações $y = 0 \wedge x - 1 = 1 - z$ são equações cartesianas da recta AB.

3. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e w:

$$(S) \begin{cases} x + y + z + \alpha w = 0 \\ \alpha x + 2y + \alpha z + \alpha^2 w = 1 \\ \beta x + \beta y + \alpha z + (\beta\alpha) w = -1 \\ x + y + z + (\alpha + \beta - 3) w = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Para $\alpha = -3$ e $\beta = 3$, $(-\frac{11}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0)$ é a única solução do sistema.

B Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é a única solução do sistema.

C Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, a matriz simples do sistema é invertível.

D Se $\alpha = \beta$, o sistema é impossível.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $AB = I_2$.

$\boxed{\text{B}}$ $A(BA) = A$.

$\boxed{\text{C}}$ A é invertível e $A^{-1} = B$.

$\boxed{\text{D}}$ $AB \neq BA$.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -6$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A é invertível e $|A^{-1}| = 6$.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$.

$\boxed{\text{C}}$ $\det(-A) = -\det A$.

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

TESTE C

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -6$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det(-A) = -\det A$.

B $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$.

C A é invertível e $|A^{-1}| = 6$.

D $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é invertível e $A^{-1} = B$.

B $A(BA) = A$.

C $AB = I_2$.

D $AB \neq BA$.

3. Considere um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,0,0)$ e $C = (0,1,0)$ e ainda o vector $u = (0,-1,2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u é 4.

B As equações $y = 0 \wedge x - 1 = 1 - z$ são equações cartesianas da recta AB.

C Uma equação geral do plano que contém os pontos A, B e C é $x + 2y + z - 2 = 0$.

D Os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u são complanares.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = 3w\}$ e $G = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 3), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(2, 1, 0, 0) \in F \cap G$.

B $(6, -1, -2, -1) \in G$.

C $\dim G = 4$.

D $\dim F = 2$.

5. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e w:

$$(S) \begin{cases} x + y + z + \alpha w = 0 \\ \alpha x + 2y + \alpha z + \alpha^2 w = 1 \\ \beta x + \beta y + \alpha z + (\beta\alpha)w = -1 \\ x + y + z + (\alpha + \beta - 3)w = \alpha + \beta \end{cases} .$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Para $\alpha = -3$ e $\beta = 3$, $(-\frac{11}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0)$ é a única solução do sistema.

B Se $\alpha = \beta$, o sistema é impossível.

C Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, a matriz simples do sistema é invertível.

D Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é a única solução do sistema.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

TESTE D

1. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x, y, z e w:

$$(S)\begin{cases} x+y+z+\alpha w=0 \\ \alpha x+2y+\alpha z+\alpha^2 w=1 \\ \beta x+\beta y+\alpha z+(\beta\alpha)w=-1 \\ x+y+z+(\alpha+\beta-3)w=\alpha+\beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, a matriz simples do sistema é invertível.

B Se $\alpha = \beta$, o sistema é impossível.

C Para $\alpha = -3$ e $\beta = 3$, $(-\frac{11}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 0)$ é a única solução do sistema.

D Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ é a única solução do sistema.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = -6$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det(-A) = -\det A$.

B $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$.

C A é invertível e $|A^{-1}| = 6$.

D $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é invertível e $A^{-1} = B$.

B $A(BA) = A$.

C $AB \neq BA$.

D $AB = I_2$.

Continua no verso desta folha

4. Considere um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$, os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 0, 0)$ e $C = (0, 1, 0)$ e ainda o vector $u = (0, -1, 2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A: As equações $y = 0 \wedge x - 1 = 1 - z$ são equações cartesianas da recta AB.

B: Os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u são complanares.

C: O volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u é 4.

D: Uma equação geral do plano que contém os pontos A, B e C é $x + 2y + z - 2 = 0$.

5. Sejam $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = 3w\}$ e $G = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 3), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A: $(2, 1, 0, 0) \in F \cap G$.

B: $\dim F = 2$.

C: $\dim G = 4$.

D: $(6, -1, -2, -1) \in G$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por
$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$
onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4.5] **6.** Seja $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c+d, 0).$$

(a) Determine uma base para o Nuc f.

(b) Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$.

Determine $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

(c) Mostre que $\dim \operatorname{Nuc} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$. Conclua, justificando, que f não é injectiva nem sobrejectiva.

(d) Utilizando matrizes de mudança de base, determine $B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, b.c._{\mathbb{R}^3})$, onde $b.c._{\mathbb{R}^3}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$

Mude de Folha

[4.5] **7.** seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

(a) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

(c) Indique a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A e diga, justificando, se A é diagonalizável.

(d) Indique uma matriz diagonal D semelhante a A e uma matriz invertível P tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2.0] **8.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que verifica: $2A^4 - A^2 = I_n$.

(a) Justifique que A é invertível e indique a inversa de A.

(b) Verifique que $\frac{1}{2}$ não é valor próprio de A^2.

Mude de Folha

[1.5] **9.** Mostre que, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e X é um vector próprio de A associado ao valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, então X é vector próprio de $A^p, p \in \mathbb{N}$, associado ao valor próprio α^p.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2007

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	B	C	D	D	C
Versão B	A	A	A	C	A
Versão C	C	A	A	C	A
Versão D	C	C	A	C	C

6. (a) Por definição, $\operatorname{Nuc} f = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (0,0,0) \right\}$. Então, os elementos do $\operatorname{Nuc} f$ são as soluções do sistema: $\begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ d=-c \end{cases}$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} f = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ c & -c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

Como os vectores $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ não são múltiplos um do outro, são linearmente independentes, pelo que $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base do $\operatorname{Nuc} f$.

(b) Temos:

$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (1,1,0) = \underline{0}(1,1,1) + \underline{1}(1,1,0) + \underline{0}(1,0,0)$,

$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = (1,1,0) = \underline{0}(1,1,1) + \underline{1}(1,1,0) + \underline{0}(1,0,0)$,

$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (2,0,0) = \underline{0}(1,1,1) + \underline{0}(1,1,0) + \underline{2}(1,0,0)$ e

$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (0,1,0) = \underline{0}(1,1,1) + \underline{1}(1,1,0) + (\underline{-1})(1,0,0)$. Assim,

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Tendo em conta a base encontrada em (a), $\dim \operatorname{Nuc} f = 2 \neq 0$, donde f não é injectiva. Por outro lado, atendendo ao teorema das dimensões:

$$\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f \Leftrightarrow 4 = 2 + \dim \operatorname{Im} f,$$

donde $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Logo, f não é sobrejectiva.

(d) Consideremos o esquema seguinte:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_1 & \mathcal{M}_2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] & \mathcal{B}_2 \\ & & \mathbb{R}^3 & b.c. \end{tikzcd}$$

Sendo $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, b.c._{\mathbb{R}^3})$, tem-se

$$B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, b.c._{\mathbb{R}^3}) = PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico de A:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-2-\lambda),$$

tendo em conta que se trata do determinante de uma matriz triangular inferior. Por outro lado, $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$, donde os valores próprios de A são 2 e -2. Além disso, m.a.(2)=2 e m.a.(-2)=1.

(b) O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é $M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3)X = 0\}$. Considerando a matriz simples do sistema em causa,

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3+l_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}l_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, M_2 é o conjunto-solução do sistema $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$, donde

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Os vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes, já que não são múltiplos um do outro.
Logo, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1.
Procedendo de forma análoga em relação ao valor próprio -2, temos

$$M_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : (A - (-2)I_3)X = 0\}.$$

Da matriz $A - (-2)I_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, obtemos a forma de escada reduzida $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que corresponde ao sistema $\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Assim, $M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

Como $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, trata-se de um vector linearmente independente, pelo que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_{-2}.

(c) Temos m.g.(2)=dim M_2=2 e m.g.(-2)=dim M_{-2}=1. Por outro lado, m.g.(2)+m.g.(-2)=2+1=ordem de A, donde A é diagonalizável.

(d) Atendendo às bases encontradas em (b) e aos valores próprios correspondentes, basta considerar, por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

8. (a) Da hipótese, pondo A em evidência, concluimos que $A(2A^3 - A) = (2A^3 - A)A = I_n$, pelo que a matriz A é invertível e $A^{-1} = 2A^3 - A$.

(b) Atendendo à hipótese, temos $2A^2(A^2 - \frac{1}{2}I_n) = I_n$. Se $\frac{1}{2}$ fosse valor próprio de A^2, seria raíz do polinómio característico de A^2, donde

$$\begin{aligned} \det\left(2A^2(A^2 - \frac{1}{2}I_n)\right) = \det(I_n) &\iff \det\left(2A^2\right)\det\left(A^2 - \frac{1}{2}I_n\right) = 1 \\ &\iff \det\left(2A^2\right).0 = 1 \\ &\iff 0 = 1, \end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo, $\frac{1}{2}$ não é valor próprio de A^2.

9. Façamos a demonstração por indução em p.

Se X é um vector próprio de A associado ao valor próprio α, então $AX = \alpha X$, o que é equivalente a $A^1X = \alpha^1 X$, o que prova a propriedade no caso $p = 1$.

Admitindo agora, como hipótese de indução, que X é vector próprio de A^p, associado ao valor próprio α^p, provemos que X é também vector próprio de A^{p+1}, associado ao valor próprio α^{p+1}.

Ora, por hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} A^pX = \alpha^pX &\implies A(A^pX) = A(\alpha^pX) \qquad (1) \\ &\implies (AA^p)X = \alpha^p(AX) \\ &\implies A^{p+1}X = \alpha^p(\alpha X) \\ &\implies A^{p+1}X = (\alpha^p\alpha)X \\ &\implies A^{p+1}X = \alpha^{p+1}X, \end{aligned}$$

0 que prova que X é vector próprio de A^{p+1} associado ao valor próprio α^{p+1}.