Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 5 de Fevereiro de 2007

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $AB^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

[B] A tem característica 3.

[C] $\det A = -5$.

[D] $\mathrm{adj}\ A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

2. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} \quad \text{e} \quad G = \langle (2,1,2),(0,1,1)\rangle.$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\dim F = \dim G = 2$.

$\boxed{\text{B}}$ $F + G = \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{C}}$ $\dim(F \cap G) = 1$.

$\boxed{\text{D}}$ $((2,1,2))$ não é uma base de $F \cap G$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + 2y + 2w = 1 \\ 2x + 4y + \alpha z + 3w = 2 \\ -x - 2y + (\alpha - 2)w = \beta - 1. \end{cases}$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha \neq 0$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha = \beta = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(1-2b, c, c, 0) : b, c \in \mathbb{R}\}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & d \end{bmatrix}, \quad \text{qualquer que seja} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{Nuc} f = \langle (0,0,1,0)\rangle$.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

$\boxed{\text{C}}$ Se b.c.$_{\mathbb{R}^4}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera a base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

então a matriz da aplicação f em relação a essas bases é

$$\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{D}}$ f não é injectiva nem sobrejectiva.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 2A$. Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $|A|^2 = 8|A|$.

$\boxed{\text{B}}$ $|A| = 0$ ou $|A - 2I_3| = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é invertível então $|A| = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ Se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0,2\}$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 5 de Fevereiro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine:

[1.0] (a) Os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Os subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, invertível, e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

7. Considere em $\mathbb{R}^3$ um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$. Considere os pontos, não colineares,

$$A = (0,2,2),\ B = (1,2,3) \ \text{ e } \ C = (1,0,1).$$

Determine:

[1.0] (a) Equações normais da recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos A e B.

[1.0] (b) A área do paralelogramo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

[1.0] (c) Uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C.

[1.0] (d) A distância do ponto C à recta $\mathcal{R}$.

Mude de Folha

8. Justifique as afirmações seguintes:

[1.5] (a) Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, são matrizes semelhantes então têm o mesmo determinante.

[1.5] (b) Se $(u_1, \ldots, u_r, v)$, é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial E então a sequência $(u_1, \ldots, u_r)$ também é linearmente independente.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 5 de Fevereiro de 2007

Uma resolução

1. C

2. D

3. D

4. C

5. C

6. (a) Os valores próprios de A são os zeros do seu polinómio característico, $p_A(x)$, isto é, os elementos $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = 0$.

Ora

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} (-1-x)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} \\ &= (-1-x)(x^2-1) = -(x+1)(x+1)(x-1) = -(x+1)^2(x-1). \end{aligned}$$

Logo os valores próprios de A são -1, com multiplicidade algébrica 2, e 1, com multiplicidade algébrica 1.

(b) O subespaço próprio de A associado ao valor próprio -1 é:

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : [A - (-1)I_3]X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $[A - (-1)I_3]X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = -b + c \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -b+c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente pois nenhum dos vectores é combinação linear do outro logo, como é uma sequência geradora de M_{-1}, tem-se

$$\text{Base de } M_{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{(-1)l_1 \\ (-\frac{1}{2})l_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente pois $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ logo, como é uma sequência geradora de M_2, tem-se

$$\text{Base de } M_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

(c) Da alínea anterior concluímos que $\text{mg}(-1) = \dim M_{-1} = 2$ e $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$. Assim, a matriz A é diagonalizável pois $\text{mg}(-1) + \text{mg}(1) = 2 + 1 = 3 =$ ordem de A. Um exemplo de matriz diagonalizante de A, isto é, uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, nesse caso, obteremos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (a) A e B são dois pontos de $\mathbb{R}^3$, com $A \neq B$. Existe uma, e uma só, recta que passa pelos pontos A e B. Considerando como ponto de $\mathcal{R}$, por exemplo, o ponto A e como vector com a direcção de $\mathcal{R}$, por exemplo o vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,3) - (0,2,2) = (1,0,1)$, temos que

$$(x,y,z) = (0,2,2) + \lambda(1,0,1) \ , \lambda \in \mathbb{R}$$

é uma equação vectorial da recta $\mathcal{R}$. Desta equação obtemos o seguinte sistema de equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Então

$$x = z - 2 \ \text{ e } \ y = 2$$

são equações normais da recta $\mathcal{R}$.

(b) Pela alínea (a) já sabemos que $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$. Ora $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,0,1) - (0,2,2) = (1,-2,-1)$. Tendo em conta as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem-se:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} e_3 = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3.$$

A área do paralelogramo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dada por:

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

(c) Como A, B e C não são colineares existe um único plano que passa pelos pontos A, B e C. Visto que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano pretendido, uma equação geral desse plano é da forma

$$2x + 2y - 2z + d = 0.$$

Como o plano passa no ponto $A = (0,2,2)$ concluímos que

$$2 \times 0 + 2 \times 2 - 2 \times 2 + d = 0$$

isto é, $d = 0$.

Assim

$$2x + 2y - 2z = 0,$$

ou equivalentemente,

$$x + y - z = 0$$

é uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C.

(d) A distância do ponto C à recta $\mathcal{R}$, a qual se denota por $\mathrm{d}(C,\mathcal{R})$, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(C,\mathcal{R}) &= \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{2\sqrt{3}}{\overrightarrow{AB}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

8. (a) Como A é semelhante a B existe uma matriz $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Então $|B| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |P^{-1}P||A| = |I_n||A| = 1|A| = |A|$.

(b) Pelo Critério de Independência Linear a sequência $(u_1, \dots, u_r)$ é linearmente independente se, e só se,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Ora se $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$ temos também $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + 0v = 0_E$ e, como por hipótese $(u_1, \dots, u_r, v)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de E, vem $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Logo $(u_1, \dots, u_r)$ é linearmente independente, conforme pretendíamos.

Alternativa: Podemos demonstrar o que se pretende provando que se $(u_1, \dots, u_r)$ é linearmente dependente então $(u_1, \dots, u_r, v)$ é também linearmente dependente.

Pelo Critério de Independência Linear, afirmar que $(u_1, \dots, u_r)$ é linearmente dependente equivale a afirmar que existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Então

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + 0v = 0_E,$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ não todos nulos. Logo, pelo mesmo Critério, a sequência $(u_1, \dots, u_r, v)$ é também linearmente dependente.