FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame – 08 de Fevereiro de 2007

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- **Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.**
- **Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.**
- **Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
  - **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**
- **A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{cl_M}\}}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**

1. Considere a base $\mathcal{B}_1 = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e as bases $\mathcal{B}_2 = \big((1,0),(1,1)\big)$ e $\mathcal{B}_3 = \big((1,0),(3,1)\big)$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$f(a,b,c) = (a+b,\ b-c)$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

B $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3)$.

D $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

Continua no verso desta folha

2. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + (\beta+1)y + z = 1 \\ x + y + (\alpha+3)z = \beta \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- $\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha \neq -2$ e $\beta = 0$ então o sistema é impossível.
- $\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha \neq -2$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é possível e determinado.
- $\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é impossível.
- $\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha = -2$ e $\beta = 1$ então o conjunto solução do sistema é $\{(1-z,\, 0,\, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$.

3. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ considere o subespaço

$$F = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a + 2c - d = 0 \quad \wedge \quad a + b + 3c = 0\right\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- $\boxed{\text{A}}$ $\dim F = 2$.
- $\boxed{\text{B}}$ $(-2,-4,2,2) \notin F$.
- $\boxed{\text{C}}$ $F = \big\langle (-2,-1,1,0), (1,-1,0,1), (-1,-2,1,1) \big\rangle$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\big((-2,-1,1,0), (1,-1,0,1)\big)$ é uma base de F.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- $\boxed{\text{A}}$ A é invertível.
- $\boxed{\text{B}}$ $|A| = 24$.
- $\boxed{\text{C}}$ $|2A| = 2^4|A|$.
- $\boxed{\text{D}}$ $|-A| = -|A|$.

5. Em $\mathbb{R}^3$ consideremos o referencial canónico. Sejam $\mathcal{R}_1$ a recta com equação vectorial

$$(x,y,z) = (3,0,1) + \alpha(1,0,0), \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

e $\mathcal{R}_2$ a recta com equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- $\boxed{\text{A}}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ é uma representação cartesiana da recta $\mathcal{R}_1$.
- $\boxed{\text{B}}$ O ponto $(1,2,4)$ é um ponto da recta $\mathcal{R}_2$.
- $\boxed{\text{C}}$ O ponto $(1,0,1)$ é um ponto comum às rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.
- $\boxed{\text{D}}$ $(x,y,z) = (1,-1,0) + \beta(0,1,1)$, com $\beta \in \mathbb{R}$, é uma equação vectorial da recta $\mathcal{R}_2$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame – 08 de Fevereiro de 2007

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[2.0] (a) Justifique que A é invertível e, utilizando a matriz adj A, determine A^{-1}.

[1.5] (b) Determine matrizes elementares $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $E_2E_1 = A^{-1}$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Calcule os valores próprios de A.

[2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1.5] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

8. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ considere a aplicação linear $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f_{\alpha,\beta}(a,b,c) = \Big((\alpha+1)a + c,\ (\alpha+1)a + (\beta-2)b,\ (\beta-2)b + \alpha c\Big)$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.5] (a) Determine, caso existam, os valores de α e β para os quais $f_{\alpha,\beta}$ é injectiva.

[1.0] (b) Determine, caso existam, os valores de α e β para os quais $f_{\alpha,\beta}$ é sobrejectiva.

Mude de Folha

[2.0] **9.** Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame – 08 de Fevereiro de 2007

Uma resolução com notas explicativas

---

1. C

2. A

3. B

4. D

5. B

6. (a) Sabemos que A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{l_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}(-1) = -1 \neq 0$$

concluímos que A é invertível.

Determinemos a matriz $\operatorname{adj} A$.

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, como $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$, resulta que

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é invertível, I_3 é a forma de escada reduzida de A. Vejamos que é possível obter a forma de escada reduzida de A efectuando apenas 2 transformações elementares. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-4)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Às transformação elementares efectuadas "$l_2 + (-4)l_1$" e "$l_2 \leftrightarrow l_3$" correspondem as matrizes elementares $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, respectivamente. Como A é invertível e

$$E_2 E_1 A = I_3$$

concluímos que

$$E_2 E_1 = A^{-1}.$$

7. (a) O polinómio característico de A é

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{l_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (2-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(-2+\lambda)\lambda.$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 2.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; a = -c \;\wedge\; b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \; c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \; c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente ($\mathrm{r}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$).

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; a = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente independente ($\mathrm{r}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$).

(c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Atendendo à resolução da alínea anterior, temos que $\mathrm{mg}(0) = \dim M_0 = 1$ e $\mathrm{mg}(2) = \dim M_2 = 2$. Como $\mathrm{mg}(0) + \mathrm{mg}(2) = 3 =$ ordem de A, concluímos que A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 0, 2 e 2 na diagonal. Por exemplo, se considerarmos a matriz $D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$, a matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a primeira coluna é o vector da base de M_0 e a segunda e terceira colunas são os vectores da base de M_2, é invertível e, além disso, $P^{-1}AP = D$.

8. (a) Sabemos que $f_{\alpha,\beta}$ será injectiva se, e só se, $\operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} = \{(0,0,0)\}$. Determinemos se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} = \{(0,0,0)\}$.

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ f_{\alpha,\beta}(a,b,c) = (0,0,0)\big\}\\ &= \Big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ \Big((\alpha+1)a + c,\ (\alpha+1)a + (\beta-2)b,\ (\beta-2)b + \alpha c\Big) = (0,0,0)\Big\}\\ &= \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ (\alpha+1)a + c = 0 \ \wedge \ (\alpha+1)a + (\beta-2)b = 0 \ \wedge \ (\beta-2)b + \alpha c = 0\big\},\end{aligned}$$

existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} = \{(0,0,0)\}$ se, e só se, existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema homogéneo nas incógnitas a, b, c, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases}(\alpha+1)a + c = 0\\ (\alpha+1)a + (\beta-2)b = 0\\ (\beta-2)b + \alpha c = 0\end{cases}$$

seja determinado.

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\alpha+1 & 0 & 1 & 0\\ \alpha+1 & \beta-2 & 0 & 0\\ 0 & \beta-2 & \alpha & 0\end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c}\alpha+1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \beta-2 & -1 & 0\\ 0 & \beta-2 & \alpha & 0\end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c}\alpha+1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \beta-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0\end{array}\right] = [A|0]$$

O sistema homogéneo em estudo é determinado se, e só se, $\mathrm{r}(A) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ incógnitas. Logo $f_{\alpha,\beta}$ é injectiva se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) Sabemos que $f_{\alpha,\beta}$ é sobrejectiva quando $\operatorname{Im} f_{\alpha,\beta}$ coincide com o conjunto de chegada, isto é, quando $\operatorname{Im} f_{\alpha,\beta} = \mathbb{R}^3$. Logo, $f_{\alpha,\beta}$ é sobrejectiva se, e só se, $\dim \operatorname{Im} f_{\alpha,\beta} = 3$.

Como, pelo Teorema da Dimensão,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} + \dim \operatorname{Im} f_{\alpha,\beta},$$

concluímos que $\dim \operatorname{Im} f_{\alpha,\beta} = 3$ se, e só se, $\dim \operatorname{Nuc} f_{\alpha,\beta} = 0$, isto é, $f_{\alpha,\beta}$ é sobrejectiva se, e só se, $f_{\alpha,\beta}$ é injectiva. Logo, $f_{\alpha,\beta}$ é sobrejectiva se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

9. Para qualquer matriz $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, tem-se

$$Q \operatorname{adj} Q = |Q| I_n.$$

Se Q é invertível resulta que

$$|Q| \neq 0 \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \operatorname{adj} Q.$$

Temos

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \operatorname{adj}(AB)$$

e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \left(\frac{1}{|B|} \operatorname{adj} B\right)\left(\frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A\right).$$

Logo

$$\frac{1}{|AB|} \operatorname{adj}(AB) = \left(\frac{1}{|B|} \operatorname{adj} B\right)\left(\frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{|B||A|} (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$$

e, como

$$|AB| = |A||B| = |B||A|,$$

concluímos, como pretendíamos, que

$$\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A).$$