Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Mini-Teste – 10 de Janeiro de 2007

Nos grupos seguintes, só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas.

Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 2)$ e $C = (0, 3, 4)$.

[0.5] (a) Verifique se os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

[0.5] (b) Determine a área do triângulo determinado pelos pontos A, B e C.

[0.5] (c) Determine as coordenadas de um vector u que é perpendicular ao plano definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e cuja norma é $\sqrt{6}$.

[0.5] (d) Determine o volume do prisma triangular determinado pelo triângulo $[ABC]$ e pelo vector u determinado na alínea anterior.

(Sugestão: Tenha em atenção que o volume do prisma referido é metade do volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e u.)

2. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 2)$ e $C = (0, 3, 4)$.

[0.5] (a) Determine a equação vectorial do plano π que contém os pontos A, B e C.

[0.5] (b) Escreva as equações cartesianas da recta r que passa pelo ponto A e é perpendicular ao plano π.

[0.5] (c) Calcule $d(B, r)$.

[0.5] (d) Considere o plano $\beta : y - z + 7 = 0$. Determine $\sphericalangle(\beta, r)$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Mini-Teste – 10 de Janeiro de 2007

Uma Resolução

1. (a) Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,2) - (1,1,1) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,3,4) - (1,1,1) = (-1,2,3)$. Como o referencial é ortonormado, $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 0 \times 2 + 1 \times 3 = 2$. Como o resultado obtido é diferente de zero, os vectores em questão não são perpendiculares.

(b) Tem-se que $A_{[ABC]} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. Como o referencial é ortonormado directo, podemos calcular o produto externo dos vectores da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2e_1 - 4e_2 + 2e_3.$$

Então, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,2)$ e $A_{[ABC]} = \frac{1}{2}\|(-2,-4,2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$.

(c) Sabemos que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e que $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{24}$. Um vector nas condições pedidas é, por exemplo, $u = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = (-1,-2,1)$.

(d) O volume pretendido é $V = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|u| = \frac{1}{2}|(-2,-4,2)|(-1,-2,1)| = \frac{1}{2}|2+8+2| = 6$.

2. (a) Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,2) - (1,1,1) = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,3,4) - (1,1,1) = (-1,2,3)$. Estes dois vectores são linearmente independentes, pelo que:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,2,3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

é uma equação vectorial do plano π.

(b) Tem-se que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano π. Como o referencial é ortonormado directo, podemos calcular o produto externo dos vectores da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2e_1 - 4e_2 + 2e_3.$$

Então, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-4,2)$. Como r é perpendicular a π, o vector $(-2,-4,2)$ é um vector director para r. Como, além disso, r passa pelo ponto $A = (1,1,1)$, um sistema de equações cartesianas para a recta r pode ser

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{2}.$$

(c) Como $r \perp \pi$, $A, B \in \pi$ e $r \cap \pi = \{A\}$, tem-se que $d(B,r) = d(B,A) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(d) O vector $w = (0,1,-1)$ é um vector perpendicular a β e o vector $v = (-2,-4,2)$ é um vector director da recta r. Assim,

$$\sphericalangle(\beta, r) = \arcsin \frac{|v|w|}{\|v\|\|w\|} = \arcsin \frac{|(-2,-4,2)|(0,1,-1)|}{\|(-2,-4,2)\|\|(0,1,-1)\|} = \arcsin \frac{|-6|}{\sqrt{24}\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} rad.$$