Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Prova Global – 17 de Janeiro de 2007

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz B tem característica 3.

B Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tem-se $\begin{vmatrix} -\alpha & -2 & 0 \\ \alpha\beta & \beta & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta|B|$.

C B é invertível e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $\operatorname{adj} B \neq B^{-1}$.

Continua no verso desta folha

2. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \langle (1,2,3),(0,0,4)\rangle \quad \text{e} \quad G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b = 0\}.$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\dim F = 2 = \dim G$.

$\boxed{\text{B}}$ $((-2,1,0),(0,0,1))$ é uma base de G.

$\boxed{\text{C}}$ $F + G = \langle (1,2,3),(0,0,4),(-2,1,0),(0,0,1)\rangle \neq \langle (1,2,3),(-2,1,0),(0,0,1)\rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim(F \cap G) = 1$ e $(0,0,4) \in (F \cap G)$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 2\beta \\ x + \alpha y + z = \beta \\ x + y + 2\alpha z = 2\beta. \end{cases}$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = \frac{1}{2}$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 1$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é impossível.

$\boxed{\text{D}}$ Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, o conjunto das soluções do sistema é $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = 2 \wedge a = -c\}$.

4. Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$f(a,b) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & a+1 \end{bmatrix}$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$g(a,b) = (a-b, -2b)$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$h(ax^2 + bx + c) = 2a + b + c$, para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ f não é linear, mas g é linear.

$\boxed{\text{B}}$ f não é linear, mas h é linear.

$\boxed{\text{C}}$ f e h não são lineares.

$\boxed{\text{D}}$ g e h são lineares.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AA^\top = 2I_n$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ 0 não é valor próprio de A.

$\boxed{\text{B}}$ A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{2}I_n$.

$\boxed{\text{C}}$ $AA^\top$ tem apenas o valor próprio 2.

$\boxed{\text{D}}$ $|A|^2 = 2^n$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Prova Global – 17 de Janeiro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(a,b,c,d) = (a-b, c+d), \quad \text{qualquer que seja} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

[1.0] (a) Justifique que $\operatorname{Nuc} f = \langle (1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle$.

[1.0] (b) Mostre que f não é injectiva mas é sobrejectiva.

[1.0] (c) Considerando em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_1 = ((1,1,0,0), (0,0,-1,1), (0,1,0,0), (0,0,0,-1))$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}'_1 = ((0,2), (-1,0))$, determine a matriz da aplicação linear f em relação a tais bases, $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$.

[1.5] (d) A partir de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$ obtenha $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$ onde

$$\mathcal{B}_2 = ((2,2,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,-1), (0,0,3,-3)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'_2 = ((0,1), (-1,0)).$$

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Justifique que o seu polinómio característico é $p(x) = |A - xI_3| = (1-x)^2(2-x)$.

[2.0] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Demonstre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

8. Considere em $\mathbb{R}^3$ um referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$. Considere os pontos $A = (-1,1,3)$, $B = (0,2,-1)$ e $C = (0,0,1)$.

[0.5] (a) Determine equações normais da recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos A e B.

[1.0] (b) Justifique que A, B e C não são colineares e determine a área do triângulo cujos vértices são A, B e C.

[1.0] (c) Indique uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Prova Global – 17 de Janeiro de 2007

Uma resolução

1. D

2. C

3. C

4. C

5. B

6. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc} f &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : f(a,b,c,d) = (0,0)\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a-b, c+d) = (0,0)\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a-b=0 \wedge c+d=0\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a=b \wedge c=-d\} \\
&= \{(b,b,-d,d) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(b,b,0,0)+(0,0,-d,d) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b(1,1,0,0)+d(0,0,-1,1) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,1,0,0),(0,0,-1,1)\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Como vimos na alínea (a) $\mathrm{Nuc}\, f = \langle (1,1,0,0),(0,0,-1,1)\rangle \neq \{(0,0,0,0)\}$, logo f não é injectiva.

No que diz respeito à $\mathrm{Im} f$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im} f &= \{f(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \{(a-b, c+d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a,0)+(-b,0)+(0,c)+(0,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1,0)+b(-1,0)+c(0,1)+d(0,1) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0),(-1,0),(0,1),(0,1)\rangle \\
&= \langle (1,0),(-1,0),(0,1)\rangle = \langle (1,0),(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Logo f é sobrejectiva.

(c) Tem-se

$$\begin{array}{lcrcr}
f(1,1,0,0) & = & (0,0) & = & \mathbf{0}(0,2)+\mathbf{0}(-1,0) \\
f(0,0,-1,1) & = & (0,0) & = & \mathbf{0}(0,2)+\mathbf{0}(-1,0) \\
f(0,1,0,0) & = & (-1,0) & = & \mathbf{0}(0,2)+\mathbf{1}(-1,0) \\
f(0,0,0,-1) & = & (0,-1) & = & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(0,2)+\mathbf{0}(-1,0)
\end{array}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{B}_2 & Q & \mathcal{B}_1 & A & \mathcal{B}_1' & P & \mathcal{B}_2' \end{array}$$

em que $Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')$ e $P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')$. Então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') = PAQ$. Ora

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(2,2,0,0) & = & (2,2,0,0) & = & \mathbf{2}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,1,0,0) & = & (0,1,0,0) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{1}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,0,0,-1) & = & (0,0,0,-1) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{1}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,0,3,-3) & = & (0,0,3,-3) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + -\mathbf{3}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \end{array}$$

pelo que

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(0,2) & = & (0,2) & = & \mathbf{2}(0,1) + \mathbf{0}(-1,0) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(-1,0) & = & (-1,0) & = & \mathbf{0}(0,1) + \mathbf{1}(-1,0) \end{array}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. (a) Ora

$$A - xI_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{aligned} p(x) &= |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(2-x)(1-x) = (1-x)^2(2-x). \end{aligned}$$

(b) Os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico logo, pelo que vimos na alínea (a), a matriz tem os valores próprios 1 e 2.

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente pois nenhum dos vectores é combinação linear do outro logo, como é uma sequência geradora de M_1, tem-se

$$\text{Base de } M_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é:

$$\begin{aligned} M_2 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3)X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 2I_3)X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente pois $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ logo, como é uma sequência geradora de M_2, tem-se

$$\text{Base de } M_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(c) Da alínea anterior concluímos que $\mathrm{mg}(1) = \dim M_1 = 2$ e $\mathrm{mg}(2) = \dim M_2 = 1$. Assim, a matriz A é diagonalizável pois $\mathrm{mg}(1) + \mathrm{mg}(2) = 2 + 1 = 3 =$ ordem de A. Um exemplo de matriz diagonalizante de A é a matriz invertível

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, nesse caso, obteremos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. (a) A e B são dois pontos de $\mathbb{R}^3$, com $A \neq B$. Existe uma, e uma só, recta que passa pelos pontos A e B. Considerando como ponto de $\mathcal{R}$, por exemplo, o ponto A e como vector com a direcção de $\mathcal{R}$, por exemplo o vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, -1) - (-1, 1, 3) = (1, 1, -4)$, temos que

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + \lambda(1, 1, -4) \ , \lambda \in \mathbb{R}$$

é uma equação vectorial da recta $\mathcal{R}$. Desta equação obtemos o seguinte sistema de equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}.$$

Então $x + 1 = y - 1 = \dfrac{z - 3}{-4}$ são equações normais da recta $\mathcal{R}$.

(b) Pela alínea (a) já sabemos que $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4)$. Por outro lado $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 1) - (-1, 1, 3) = (1, -1, -2)$. Como não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$, concluímos que A, B e C não são colineares. Tendo em conta as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem-se:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} e_3 = -6e_1 - 2e_2 - 2e_3.$$

A área do triângulo cujos vértices são A, B e C é dada por:

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}.$$

(c) Já vimos na alínea (b) que A, B e C não são colineares e, portanto, existe um único plano que passa pelos pontos A, B e C. Visto que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano pretendido, uma equação geral desse plano é da forma

$$-6x - 2y - 2z + d = 0.$$

Como o plano passa no ponto $A = (-1, 1, 3)$ concluímos que

$$-6 \times (-1) - 2 \times 1 - 2 \times 3 + d = 0$$

isto é, $d = 2$.

Assim

$$-6x - 2y - 2z + 2 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$3x + y + z - 1 = 0$$

é uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C.