



Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT-UNL

Prova Global – 13 de Janeiro de 2007

Primeira Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -3 & 2 \\ 0 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$.

- (a) Determine os valores de α para os quais $\det(A_\alpha) = 1$.
- (b) Para que valores de α a matriz A_α é invertível.

Mude de Folha

2. Considere a matriz $A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 + \alpha\beta & 2\beta \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine a característica de $A_{\alpha,\beta}$ em função de α e β .
- (b) Para que valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a matriz $A_{\alpha,\beta}$ é invertível.
- (c) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 0$,
 - i. determine os valores próprios e os subespaços próprios de $A_{\alpha,\beta}$.
 - ii. A matriz $A_{\alpha,\beta}$ é diagonalizável? Justifique.

Mude de Folha

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que

$$f(1, 0, 0) = (3, 2), f(0, 0, 1) = (1, 0) \text{ e } f(0, 1, 0) = (-1, 1).$$

- (a) Determine $A = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, ((1, 1), (2, 1)))$, onde $b.c._{\mathbb{R}^3}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Calcule $f(1, 0, 2)$.
- (c) Usando matrizes de mudança de base determine $\mathcal{M}(f; ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)), b.c._{\mathbb{R}^2})$, onde $b.c._{\mathbb{R}^2}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Mude de Folha

4. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos $A = (-1, 0, 4)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (-2, 3, 1)$. Determine uma equação geral do plano definido pelos pontos A , B e C .



Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT-UNL

Prova Global – 13 de Janeiro de 2007

Segunda Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

5. Considere os subespaços vectoriais $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + w = 0 \wedge x - y - z = 0\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 1), (-1, -1, 1, -3), (1, -1, 1, -1) \rangle$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$.

- (a) Calcule a dimensão de F .
- (b) Determine uma base de $F + G$.
- (c) Caracterize o subespaço $F \cap G$.
- (d) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de G .
- (e) Averigüe se $(1, 0, 5, 0) \in G$.

Mude de Folha

6. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a - b, a + d, d - b), \text{ para todo } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

- (a) Mostre que f é uma aplicação linear.
- (b) Mostre que $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)))$.
- (d) Averigüe se f é sobrejectiva.
- (e) Determine uma base de $\text{Nuc } f$.

Mude de Folha

7. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$, com E de dimensão finita, e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear tal que $0 < \dim \text{Nuc } f < \dim E$. Mostre que $\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f$.

Sugestão: Comece por considerar $(v_1, \dots, v_p)$ uma base de $\text{Nuc } f$.

Fim

UMA RESOLUÇÃO

1. (a) Calculemos o determinante de A_α utilizando o desenvolvimento de Laplace pela coluna 1. Ora

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\alpha & -3 & 2 \\ 0 & 2-\alpha & -1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(1-\alpha) \begin{vmatrix} 2-\alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)((2-\alpha)(-\alpha)+1) \\ &= (1-\alpha)(\alpha^2-2\alpha+1) = -\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+1. \end{aligned}$$

Ora

$$|A_\alpha| = 1 \Leftrightarrow -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Note-se que o polinómio do segundo grau $-\alpha^2 + 3\alpha - 3$ não tem zeros em $\mathbb{R}$.

- (b) Sabemos que uma matriz quadrada é invertível se, e só se, o seu determinante é não nulo. Pela alínea a) temos

$$|A_\alpha| = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(\alpha^2-2\alpha+1) \Leftrightarrow (1-\alpha)(\alpha-1)^2 = 0 \Leftrightarrow -(\alpha-1)^3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Portanto a matriz A_α é invertível se, e só se, $\alpha \neq 1$.

2. (a)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 + \alpha\beta & 2\beta \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[l_4 - l_1]{l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 + \alpha\beta & 2\beta \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 + \alpha\beta & 2\beta \\ 0 & \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 - \alpha l_2]{l_3 - \alpha l_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 + \alpha\beta & 2\beta \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 - \alpha l_2]{l_3 - \alpha l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \alpha\beta & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então:

- Se $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -\beta \wedge \beta \neq 0$, a característica de $A_{\alpha,\beta}$ é 4.
- Se $\alpha = 0 \vee \alpha = -\beta \vee \beta = 0$ então $r(A_{\alpha,\beta}) = 3$.

- (b) A matriz $A_{\alpha,\beta}$ é invertível, se, e só se, $r(A_{\alpha,\beta})$ é igual à ordem da matriz A , ou seja igual a 4.

Por conseguinte, tendo em conta a alínea anterior, temos que $A_{\alpha,\beta}$ é invertível se, e só se, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ e $\alpha \neq -\beta$.

- (c)i) Para determinar os valores próprios de $A_{0,0}$ teremos de calcular o polinómio característico $|A_{0,0} - \lambda I_4|$ da matriz $A_{0,0}$.

Ora

$$|A_{0,0} - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)^2(2-\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)(2-\lambda),$$

pois o determinante de uma matriz triangular inferior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Dado que os valores próprios de $A_{0,0}$ são os zeros do referido polinómio, concluímos que os valores próprios de $A_{0,0}$ são 0, 1 e 2.

A seguir vamos determinar os subespaços próprios M_0, M_1 e M_2 da matriz $A_{0,0}$, associados respetivamente aos valores próprios 0, 1 e 2.

Para $\lambda = 0$ temos de resolver o sistema $A_{0,0}X = 0_{4 \times 1}$. Ora

$$A_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 - l_1]{l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja temos o sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}.$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} M_0 &= \{[x \ y \ z \ w]^T \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : x = 0, y = 0, w = 0\} \\ &= \{[0 \ 0 \ z \ 0]^T : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \rangle. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 1$ temos de resolver o sistema $(A_{0,0} - 1I_4)X = 0_{4 \times 1}$. Ora

$$A_{0,0} - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-l_3]{-l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja temos o sistema

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ y + w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -w \\ y = -w \\ z = -w \end{cases}.$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} M_1 &= \{[x \ y \ z \ w]^T \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : x = -w, y = -w, z = -w\} \\ &= \{[-w \ -w \ -w \ w]^T : w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w[-1 \ -1 \ -1 \ 1]^T : w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle [-1 \ -1 \ -1 \ 1]^T \rangle. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 2$ temos de resolver o sistema $(A_{0,0} - 2I_4)X = 0$. Ora

$$\begin{aligned} A_{0,0} - 2I_4 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4+l_1]{l_2+l_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}l_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_2]{-l_1} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja temos o sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} M_2 &= \{[x \ y \ z \ w]^T \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : x = 0, y = 0, z = 0\} \\ &= \{[0 \ 0 \ 0 \ w]^T : w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T : w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \rangle. \end{aligned}$$

- (c)ii) Dado que $\dim M_0 = \dim M_1 = \dim M_2 = 1$ temos que $mg(0) = mg(1) = mg(2) = 1$. Assim a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de $A_{0,0}$ é igual a 3, sendo portanto diferente da ordem da matriz $A_{0,0}$, ou seja de 4. Portanto $A_{0,0}$ não é diagonalizável.

3. (a) Para determinar $A = \mathcal{M}(f; b.c_{\mathbb{R}^3}, (1,1), (2,1))$ teremos de ir calcular as imagens, por meio de f , dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ e depois escrever essas imagens como combinação linear da base $((1,1), (2,1))$ de $\mathbb{R}^2$. Os coeficientes dessas combinações formarão as colunas da matriz pretendida.

Ora

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (3, 2) = 1(1, 1) + 1(2, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (-1, 1) = 3(1, 1) + (-2)(2, 1) \\ f(0, 0, 1) &= (1, 0) = -1(1, 1) + 1(2, 1) \end{aligned}$$

$$\text{Assim temos } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Para calcular $f(1, 0, 2)$, tendo em conta que na matriz A da aplicação f a base considerada no espaço de partida é a base canónica, vamos fazer o produto matricial

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dado que relativamente à matriz A da aplicação f a base fixa à chegada é a base $((1, 1), (2, 1))$, temos que $(-1, 3)$ são as coordenadas de $f(1, 0, 2)$ nessa base. Donde $f(1, 0, 2) = -1(1, 1) + 3(2, 1) = (5, 2)$.

- (c) Ora, usando matrizes de mudança de base nos espaços de partida e de chegada, sabemos que

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(f; ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)), b.c.\mathbb{R}^2) = \\ & = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^2}; ((1, 1), (2, 1)), b.c.\mathbb{R}^2) \cdot \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, ((1, 1), (2, 1))) \cdot \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)), b.c.\mathbb{R}^3) = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. O plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos A, B e C é o plano que passa pelo ponto A e é paralelo aos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Para obter a equação geral do plano teremos de determinar um vector perpendicular aos vectores $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 3, -3)$. Para isso vamos considerar o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ que é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

Ora

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9e_1 + 12e_2 + 9e_3.$$

Então a equação geral do plano pretendido é da forma $ax + by + cz + d = 0$, em que $(a, b, c) = (9, 12, 9)$. Para tirar o valor do coeficiente d substituímos x, y e z , na equação $9x + 12y + 9z + d = 0$, respectivamente por $-1, 0$ e 4 , dado que $A = (-1, 0, 4)$ é um ponto do plano. Assim vem $d = -27$. Portanto

$$9x + 12y + 9z - 27 = 0$$

é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ que contém os pontos A, B e C .

5. a) Para determinar a dimensão do subespaço F começemos por determinar uma sequência geradora de F . Dado que temos o referido subespaço caracterizado por condições, teremos de resolver o respectivo sistema de equações. Assim vem,

$$\begin{cases} x - 3y + w = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -x + 3y \\ z = x - y \end{cases}$$

O sistema é indeterminado de grau 2, sendo w, z as incógnitas básicas e x, y as incógnitas independentes. Temos então,

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) \in F & \Leftrightarrow (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \wedge (x, y, z, w) = (x, y, x - y, 3y - x) \\ & = (x, 0, x - x) + (0, y, -y, 3y) \\ & = x(1, 0, 1, -1) + y(0, 1, -1, 3), \end{aligned}$$

onde x e y variam livremente em $\mathbb{R}$. Logo $F = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3) \rangle$.

Dado que a sequência de vectores $((1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3))$ é uma sequência linearmente independente, pois é constituída por 2 vectores não nulos em que o primeiro vector não é combinação linear do segundo, e é geradora de F , concluímos que se trata de uma base de F . Portanto $\dim F = 2$.

b) Dado que se tem

$$(-1, -1, 1, -3) = -2(1, 0, 0, 1) + 1(1, -1, 1, -1)$$

temos

$$G = \langle (1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle.$$

Por outro lado vimos na alínea anterior que,

$$F = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3) \rangle.$$

Dado que se obtém uma sequência geradora do subespaço $F + G$ fazendo a união de um conjunto de geradores de F com um conjunto de geradores de G , concluímos que

$$F + G = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3), (1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle.$$

Se colocarmos estes quatro vectores sobre as linhas de uma matriz, e fizermos transformações elementares até obter uma forma de escada da matriz, sabemos que as linhas não nulas dessa última matriz constituem uma base de $F + G$. Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_3 - l_1 \\ l_4 - l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 + l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 - l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim concluímos que $((1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3), (0, 0, -1, 2), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $F + G$ e que a dimensão do subespaço $F + G$ é igual a 4.

Como $F + G \subseteq \mathbb{R}^4$ e $\dim F + G = \dim \mathbb{R}^4$, concluímos que $F + G = \mathbb{R}^4$.

c) Sabemos que $\dim G = 2$ pois $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2$ e que

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G,$$

donde $4 = 2 + 2 - \dim F \cap G$. Assim $\dim F \cap G = 0$. Logo $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Alternativamente poderíamos ter ido achar as condições que caracterizam o subespaço G , que são $z = -y \wedge w = x + 2y$ e então saberíamos que

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + w = 0 \wedge x - y - z = 0 \wedge z + y = 0 \wedge w = x + 2y\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = w = 0\} = \langle \emptyset \rangle. \end{aligned}$$

d) Para determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de G vamos usar o método prático de considerar uma matriz A cuja primeiras linhas sejam os vectores de uma base de G e se acrescentam linhas à matriz de forma a obter uma matriz de característica 4.

Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então podemos concluir que $((1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui uma base de G .

e) Vejamos se o vector $(1, 0, 5, 0)$ é combinação linear de uma base de G .

Temos $(1, 0, 5, 0) = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(1, -1, 1, -1)$ se, e só se,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\beta = 0 \\ \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dado que temos um sistema de equações nas incógnitas α e β que é impossível, concluímos que o vector $(1, 0, 5, 0)$ não pertence ao subespaço G .

Alternativamente poderíamos também ver que a característica da matriz, em cuja duas primeiras linhas colocamos uma base de G e na terceira linha colocamos o vector $(1, 0, 5, 0)$, é igual a 3.

6. a) Sejam $(a, b, c, d), (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} f((a, b, c, d) + (a', b', c', d')) &= f(a + a', b + b', c + c', d + d') \\ &= ((a + a') - (b + b'), (a + a') + (d + d'), (d + d') - (b + b')) \\ &= ((a - b) + (a' - b'), (a + d) + (a' + d'), (d - b) + (d' - b')) \\ &= (a - b, a + d, d - b) + (a' - b', a' + d', d' - b') \\ &= f((a, b, c, d) + f(a', b', c', d')) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\alpha(a, b, c, d)) &= f(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \\ &= (\alpha a - \alpha b, \alpha a + \alpha d, \alpha d - \alpha b) \\ &= (\alpha(a - b), \alpha(a + d), \alpha(d - b)) \\ &= \alpha(a - b, a + d, d - b) \\ &= \alpha f((a, b, c, d), \end{aligned}$$

donde f é uma aplicação linear.

b) Para verificar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, dado que $\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4, basta ver que é linearmente independente. Isso equivale a provar que a matriz em cujas linhas estão os 4 vectores de $\mathcal{B}$ tem característica 4. Ora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_4 - l_1 \\ l_2 - l_1}]{\substack{l_2 - l_1 \\ l_4 - l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 + l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dado que a última matriz da sequência está em forma de escada concluímos que a matriz A tem característica 4 e que portanto $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

c) Vamos determinar as imagens dos vectores da base $\mathcal{B}$. Ora

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1, 0) &= (1, 1, 0) = 1(0, 1, 0) + 0(1, 0, 1) + 1(1, 0, 0) \\ f(1, 1, 1, 1) &= (0, 2, 0) = 2(0, 1, 0) + 0(1, 0, 1) + 0(1, 0, 0) \\ f(0, 0, 0, 1) &= (0, 1, 1) = 1(0, 1, 0) + 1(1, 0, 1) + (-1)(1, 0, 0) \\ f(1, 1, 0, 0) &= (0, 1, -1) = 1(0, 1, 0) + (-1)(1, 0, 1) + 1(1, 0, 0). \end{aligned}$$

$$\text{Donde } \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Ora a aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se $\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$. Por outro lado sabemos que $\dim \text{Im} f = r(A)$, onde A é uma matriz de f . Usando a matriz de f obtida na alínea anterior vamos, através de transformações elementares sobre linhas, transformá-la em forma de escada para assim podermos determinar a sua característica. Temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim temos

$$\dim \text{Im} f = r(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

o que prova que f é sobrejectiva.

e) Vamos começar por determinar uma sequência geradora de $Nuc f$. Ora

$$\begin{aligned}
 (a, b, c, d) \in Nuc f &\Leftrightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \wedge f(a, b, c, d) = (a - b, a + d, d - b) = (0, 0, 0) \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{cases} a - b = 0 \\ a + d = 0 \\ d - b = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{cases} a = b \\ 2b = 0 \\ d = b \end{cases} . \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \wedge \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (0, 0, c, 0) = c(0, 0, 1, 0), \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Donde temos que $Nuc f = \langle (0, 0, 1, 0) \rangle$.

Como $((0, 0, 1, 0))$ é uma sequência com apenas um vector não nulo, é linearmente independente. Logo, dado que também gera $Nuc f$, é uma base de $Nuc f$.

7. Ver na sebenta de Alga, página 173, a demonstração do teorema 5.11 (Teorema da dimensão).