



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

TESTE A

1. Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathcal{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A matriz A é invertível e $\det A = 2$.

☐ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = BA$.

☐ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ $r(B) = 2$.

2. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 \\ (1 - \beta)x_3 + 2x_4 = 2 \\ -\beta x_1 - 2\beta x_3 + \alpha x_4 = -\beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ Se $\alpha = \beta$ e $\beta \neq 0$, o sistema é impossível.

☐ Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o sistema é possível indeterminado com g.i.=2.

☐ Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-1, 1, 1, 1)$ é solução do sistema.

☐ Se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, $(\frac{3}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})$ é solução do sistema.

3. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ efectuando as seguintes transformações elementares nas linhas:

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_2} A_2 \xrightarrow{-3l_3} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ $r(A) = r(B)$.

☐ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

☐ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A$.

☐ Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.

4. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\det A = 1$.

☐ B $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ C $A^{-1} = \text{adj } A$.

☐ D $\hat{A}_{13} = 3$.

5. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, F e G subespaços de E tais que F é subespaço de G .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $F + G = F \cup G$.

☐ B $F \cup G$ é subespaço de E .

☐ C Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in G$.

☐ D Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in F$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

TESTE B

1. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ efectuando as seguintes transformações elementares nas linhas:

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_2} A_2 \xrightarrow{-3l_3} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.
- [B] $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.
- [C] $r(A) = r(B)$.
- [D] $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A$.

2. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, F e G subespaços de E tais que F é subespaço de G .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in G$.
- [B] $F \cup G$ é subespaço de E .
- [C] Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in F$.
- [D] $F + G = F \cup G$.

3. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 \\ (1 - \beta)x_3 + 2x_4 = 2 \\ -\beta x_1 - 2\beta x_3 + \alpha x_4 = -\beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-1, 1, 1, 1)$ é solução do sistema.
- [B] Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o sistema é possível indeterminado com g.i.=2.
- [C] Se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, $(\frac{3}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})$ é solução do sistema.
- [D] Se $\alpha = \beta$ e $\beta \neq 0$, o sistema é impossível.

Continua no verso desta folha

4. Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A A matriz A é invertível e $\det A = 2$.

☐ B $r(B) = 2$.

☐ C $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = BA$.

☐ D $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\hat{A}_{13} = 3$.

☐ B $A^{-1} = \text{adj } A$.

☐ C $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ D $\det A = 1$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

TESTE C

1. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ B $A^{-1} = \text{adj } A$.

☐ C $\hat{A}_{13} = 3$.

☐ D $\det A = 1$.

2. Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = BA$.

☐ B $r(B) = 2$.

☐ C A matriz A é invertível e $\det A = 2$.

☐ D $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, F e G subespaços de E tais que F é subespaço de G .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in G$.

☐ B $F + G = F \cup G$.

☐ C $F \cup G$ é subespaço de E .

☐ D Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in F$.

Continua no verso desta folha

4. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ efectuando as seguintes transformações elementares nas linhas:

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_2} A_2 \xrightarrow{-3l_3} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A.$

[B] $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

[C] Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$

[D] $r(A) = r(B).$

5. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 \\ (1 - \beta)x_3 + 2x_4 = 2 \\ -\beta x_1 - 2\beta x_3 + \alpha x_4 = -\beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-1, 1, 1, 1)$ é solução do sistema.

[B] Se $\alpha = \beta$ e $\beta \neq 0$, o sistema é impossível.

[C] Se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, $(\frac{3}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})$ é solução do sistema.

[D] Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o sistema é possível indeterminado com g.i.=2.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

TESTE D

1. Considere o sistema de quatro equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 \\ (1 - \beta)x_3 + 2x_4 = 2 \\ -\beta x_1 - 2\beta x_3 + \alpha x_4 = -\beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, $(\frac{3}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})$ é solução do sistema.
- ☐ B Se $\alpha = \beta$ e $\beta \neq 0$, o sistema é impossível.
- ☐ C Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $(-1, 1, 1, 1)$ é solução do sistema.
- ☐ D Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o sistema é possível indeterminado com g.i.=2.

2. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ B $\det A = 1$.
- ☐ C $\hat{A}_{13} = 3$.
- ☐ D $A^{-1} = \text{adj } A$.

3. Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = BA$.
- ☐ B $r(B) = 2$.
- ☐ C $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- ☐ D A matriz A é invertível e $\det A = 2$.

4. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, F e G subespaços de E tais que F é subespaço de G .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F + G = F \cup G$.
- ☐ B Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in F$.
- ☐ C Se $u \in F$ e $v \in G$, então $u + v \in G$.
- ☐ D $F \cup G$ é subespaço de E .

5. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ obtida a partir de $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathcal{R})$ efectuando as seguintes transformações elementares nas linhas:

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_2} A_2 \xrightarrow{-3l_3} B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A$.
- ☐ B $r(A) = r(B)$.
- ☐ C Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ então $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.
- ☐ D $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.

- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, cl_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4.0] 6. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & -k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Sejam, ainda, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}).$$

- (a) Determine, usando determinantes, para que valores de k a matriz A_k é invertível.
- (b) Considerando o sistema de três equações lineares $AX = B$, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 , discuta este sistema para o caso em que $k = 0$.
- (c) Para $k = -1$, justifique que $AX = B$ é um sistema de Cramer e determine o conjunto solução deste.

Mude de Folha

[4.0] 7. Considere o sistema nas incógnitas x, y, z ,

$$(S) \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Construa a matriz simples do sistema e utilize-a para verificar se $(-2, 1, 1)$ é solução do sistema.
- (b)
 - i. Indique o conjunto solução do sistema (S) .
 - ii. Verifique que o conjunto solução do sistema (S) é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- (c) Seja $F = \langle (-2, 1, 1), (1, 0, 0) \rangle$. Verifique que o vector $(5, 2, 2)$ é um vector do subespaço F mas não é solução do sistema (S) .

Mude de Folha

[3.0] 8. (a) Considere a matriz $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $M = \begin{bmatrix} x + x' & y + y' \\ z & w \end{bmatrix}$. Mostre que

$$\det M = \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x' & y' \\ z & w \end{bmatrix}.$$

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Utilize (a) para mostrar que

$$\det(A + B) = 2(\det A + \det B).$$

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	B	D	C	B	D
Versão B	D	C	C	C	C
Versão C	A	A	D	A	C
Versão D	A	A	A	B	A

6. (a) A matriz A_k é invertível sse $\det A_k \neq 0$.

Tem-se

$$\begin{aligned}\det A_k &= \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & -k \end{vmatrix} \stackrel{l_3 + (-k)l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ 0 & k+k^2 & -2k \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Lapl.} \\ c_1}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} k & k \\ k+k^2 & -2k \end{vmatrix} = \\ &= k(-2k) - k(k+k^2) = -k^2(3+k),\end{aligned}$$

donde

$$\det A_k \neq 0 \Leftrightarrow -k^2(3+k) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \wedge k \neq -3.$$

- (b) Para $k = 0$, a matriz ampliada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $r(A) = r([A|B]) = 1 < n^\circ \text{ de incógnitas} = 3$. Logo, o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2 ($= 3 - 1$).

- (c) A_{-1} é uma matriz quadrada e, atendendo à alínea a), tem-se que A_{-1} é invertível. Logo, o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer, visto que a sua matriz simples é quadrada e invertível.

Atendendo à regra de Cramer, e atendendo a que $\det A_{-1} = -(-1)^2(3-1) = -2$, vem

$$x_1 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-2) = 1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

O conjunto das soluções do sistema dado é $\{(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

7. (a) A matriz simples do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $(-2, 1, 1)$ é solução do sistema (S) .

- (b) i. Por se tratar de um sistema homogêneo, basta considerarmos a matriz simples do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

que já está em forma de escada reduzida. Logo, $\begin{cases} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$, pelo que o conjunto solução do sistema é $\{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

- ii. Seja $E = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Tem-se:

1. $E \subseteq \mathbb{R}^3$, visto que $z \in \mathbb{R} \Rightarrow (-2z, z, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) = (-2 \times 0, 0, 0) \in E$.
3. Sejam $(-2z, z, z), (-2w, w, w) \in E$. Então, $z, w \in \mathbb{R}$ e

$$(-2z, z, z) + (-2w, w, w) = (-2z - 2w, z + w, z + w) = (-2(z + w), z + w, z + w),$$

atendendo à distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$. Por outro lado, $z, w \in \mathbb{R} \Rightarrow z + w \in \mathbb{R}$, donde

$$(-2(z + w), z + w, z + w) \in E.$$

Assim, $\forall (-2z, z, z), (-2w, w, w) \in E, (-2z, z, z) + (-2w, w, w) \in E$.

4. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(-2z, z, z) \in E$. Então, $z \in \mathbb{R}, \alpha z \in \mathbb{R}$ e $\alpha(-2z, z, z) = (-2\alpha z, \alpha z, \alpha z) \in E$.

Assim, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (-2z, z, z) \in E, \alpha(-2z, z, z) \in E$.

As quatro condições verificadas permitem-nos concluir que o conjunto solução do sistema (S) é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, podemos considerar a seguinte resolução. O conjunto solução de (S) é, como vimos,

$$\{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle,$$

que se trata do subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vector $(-2, 1, 1)$.

- (c) $(5, 2, 2)$ é um vector do subespaço F se for combinação linear dos geradores de F , isto é, se existirem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(-2, 1, 1) + \beta(1, 0, 0) = (5, 2, 2).$$

Esta condição é equivalente a

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 9 \end{cases}. \text{ Logo, } (5, 2, 2) \in F.$$

As soluções do sistema (S) são da forma $(-2z, z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$, o que não é o caso do vector $(5, 2, 2)$, já que $5 \neq -2 \times 2$. Por isso, $(5, 2, 2)$ não é solução do sistema.

8. (a) Atendendo ao facto de $M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
 \det M &= \det \begin{bmatrix} x+x' & y+y' \\ z & w \end{bmatrix} \\
 &= (x+x')w - (y+y')z \\
 &= xw + x'w - yz - y'z \quad (*) \\
 &= (xw - yz) + (x'w - y'z) \\
 &= \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x' & y' \\ z & w \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(*) pelas propriedades comutativa e associativa da adição em $\mathbb{R}$ e distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$.

- (b) Tem-se $A + B = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$. Atendendo a a), temos que

$$\begin{aligned}
 \det(A+B) &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b' \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \\
 &= 2 \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix} \\
 &= 2(\det A + \det B).
 \end{aligned}$$