

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.

- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

1. Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

A $\begin{vmatrix} g & h & i \\ -d & -e & -f \\ a & b & c \end{vmatrix} = |A|.$

B $\begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3d & 3e & 3f \\ -\frac{1}{3}g & -\frac{1}{3}h & -\frac{1}{3}i \end{vmatrix} = -|A|.$

C $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}|A|.$

D $2A$ é invertível e $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}.$

Continua no verso desta folha

2. Considere, em $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2\alpha & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Os elementos da matriz $AB^\top$ não dependem de α .
- ☐ B A matriz adjunta de A tem duas linhas nulas.
- ☐ C Se $\alpha = 1$ então B é invertível.
- ☐ D $|2B| = 8|B|$.

3. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se A é invertível então a forma de escada reduzida de A é I_n .
- ☐ B Pode ter-se $B \neq 0$ e $ABA = 0$, com A invertível.
- ☐ C Se A tem característica inferior a n então $A \operatorname{adj} A = 0$.
- ☐ D Se a forma de escada reduzida de A é I_n então A é invertível.

4. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + 3\alpha x_3 + (1 - \beta)x_4 = 1 - \beta \\ \alpha x_1 + 2\alpha x_3 - \beta x_4 = -\beta. \end{cases}$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha = \beta \neq 0$ então o sistema é impossível.
- ☐ B Se $\alpha = \beta = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(1 - 2\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3, 1) : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ C Se $\alpha \neq \beta$ então, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, o sistema é indeterminado, com grau de indeterminação 2.
- ☐ D O sistema não é possível e determinado.

5. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 2, 1), \quad u_4 = (0, 7, 4).$$

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes.
- ☐ B $\langle (0, 1, 1), (0, 2, 1) \rangle = \langle (0, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 7, 4) \rangle$.
- ☐ C $(0, 6, 5) \in \langle (0, 2, 1), (0, 1, 1) \rangle$.
- ☐ D u_1, u_2, u_4 são linearmente dependentes.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes definidas da seguinte forma:

B é a matriz que se obtém de A multiplicando a linha 1 por 2;

C é a matriz que se obtém de B adicionando à linha 3 a linha 1 multiplicada por 2;

D é a matriz que se obtém de C trocando as linhas 2 e 3.

Esquemáticamente,

$$A \xrightarrow{2l_1} B \xrightarrow{l_3+2l_1} C \xrightarrow{l_2 \longleftrightarrow l_3} D.$$

[1.5] (a) Indique matrizes elementares $U, V, W \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tais que

$$WVUA = D.$$

[1.0] (b) Se $|A| = \delta$ indique, em função de δ , o valor de $|D|$.

[1.0] (c) Se $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine a característica de A .

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Utilize o Teorema de Laplace para demonstrar que

$$|A_\alpha| = \alpha^2 + 4\alpha.$$

[0.5] (b) Determine o conjunto dos valores de α , para os quais a matriz A_α é invertível.

[1.0] (c) Determine a inversa de A_1 , isto é, de A_α , com $\alpha = 1$.

[1.0] (d) Considere o sistema $A_\alpha X = 0$ e indique o conjunto dos valores de α para os quais o sistema é indeterminado.

Mude de Folha

8. Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\hat{A}_{ij}$ o complemento algébrico do elemento da posição (i, j) de A . Demonstre que:

[1.5] (a) Se, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$ então $A_{i1}\hat{A}_{j1} + \dots + A_{in}\hat{A}_{jn} = 0$.

[2.0] (b) Se tem $A \operatorname{adj} A = |A|I_n$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

Uma resolução

1. C

2. C

3. B

4. C

5. D

6. (a) As matrizes elementares pedidas são o resultado de efectuar à matriz identidade as transformações elementares indicadas. Assim,

$$I_3 \xrightarrow{2l_1} U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 \xrightarrow{l_3 + 2l_1} V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz. Portanto,

$$|A| \stackrel{=}{=} \frac{1}{2} |B|_{l_3 + 2l_1} \stackrel{=}{=} \frac{1}{2} |C|_{l_2 \leftrightarrow l_3} \stackrel{=}{=} -\frac{1}{2} |D|.$$

Temos então $|D| = -2\delta$.

- (c) A matriz D foi obtida a partir da matriz A através de transformações elementares sobre linhas, portanto, $r(D) = r(A)$.

$$A \xrightarrow{(linhas)} D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $r(A) = 2$.

7. (a) Calculemos $|A_\alpha|$ utilizando o Teorema de Laplace.

$$|A_\alpha| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} \alpha(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -\alpha \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Lapl.}}{=} \alpha(-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha(-\alpha - 4) = \alpha^2 + 4\alpha.$$

(b) Sabemos que A_α será invertível se, e só se, $|A_\alpha| \neq 0$.

Como, pela alínea anterior, $|A_\alpha| = \alpha^2 + 4\alpha$ e

$$\alpha^2 + 4\alpha \neq 0 \text{ se, e só se, } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -4,$$

concluimos que A_α é invertível se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$.

Alternativamente, podíamos estudar a característica da matriz A_α . Como $A_\alpha \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, sabemos que A_α será invertível se, e só se, $r(A_\alpha) = 4$ (= ordem de A_α).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 + (-\alpha)l_1 \\ l_4 + (-1)l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_4 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 + \frac{1}{4}\alpha l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$r(A_\alpha) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad r(A_\alpha) = 4 \text{ se, e só se, } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq -4.$$

(c) Determinemos a inversa de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Abreviadamente, vamos determinar A_1^{-1} fazendo $[A_1|I_4] \xrightarrow{(\text{linhas})} [I_4|A_1^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A_1|I_4] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + (-1)l_1 \\ l_4 + (-1)l_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_4 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_3 \leftrightarrow l_4 \\ (-1)l_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_4 + (-4)l_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}l_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{l_3 + (-1)l_4 \\ l_2 + 3l_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + 2l_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) O sistema é indeterminado se, e só se, $r(A_\alpha) < 4 = n^\circ$ incógnitas, ou seja, se e só se A_α não é invertível e pela alínea b) se, e só se, $\alpha \in \{-4, 0\}$.

8. (a) Ver a demonstração do Teorema 3.24, página 98, linhas 3 a 10.

(b) Ver a demonstração do Teorema 3.24, páginas 97 e 98.