



Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ a+g & b+h & c+i \end{vmatrix} = 2|A|$.

☐ B $|A| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 6d & 6e & 6f \\ a+g & b+h & c+i \end{vmatrix}$.

☐ C As matrizes $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 6d & 6e & 6f \\ a+g & b+h & c+i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{bmatrix}$ têm a mesma característica.

☐ D $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{5 \times 4}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $BA \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

☐ B $B^T A$ não está definida.

☐ C Se $ABCD + I_5 = 0_{5 \times 5}$ então CD e D são invertíveis.

☐ D Se BA é invertível então A tem característica 5.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $|B| - \widehat{B}_{13} = 0$, onde $\widehat{B}_{13}$ representa o complemento algébrico do elemento B_{13} .

☐ B $A \operatorname{adj} A \neq 0_{3 \times 3}$, onde $\operatorname{adj} A$ designa a matriz adjunta de A .

☐ C $\operatorname{adj} B$ é invertível.

☐ D Não existe uma matriz $C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que AC é invertível.

Continua no verso desta folha

4. Seja $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ um subespaço do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ onde

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (3, 0, 5) \text{ e } u_3 = (0, 0, 2).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $(3, 0, 2) \in F$.
☐ B $F \cap \langle (1, 0, -1) \rangle = \langle (1, 0, -1) \rangle$.
☐ C $F \neq \mathbb{R}^3$.
☐ D $\langle (1, 1, 2) \rangle$ é um subespaço de F .

5. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e u_1, u_2, u_3, u_4 vectores de E .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $(u_1, u_2 + u_3, u_2, u_3, u_4)$ é linearmente dependente.
☐ B $u_1 + u_3$ é combinação linear de $(u_1, u_2 + u_3, u_2)$.
☐ C Se $u_1 - u_2 + 2u_4 = 0_E$ então u_4 é combinação linear de (u_1, u_2, u_3) .
☐ D Se (u_1, u_2, u_3, u_4) é linearmente independente então $(\alpha u_1, u_2, u_3, u_4)$ é linearmente independente para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinala com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinala uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinala com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, cl_M\},$$
 onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

6. Seja $A = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : a + c = 0 \wedge a + b = c\}$.

- (a) Prove que A é um subespaço de $\mathbb{R}_2[x]$.
- (b) Determine um conjunto de geradores de A .
- (c) Mostre que $A \neq \mathbb{R}_2[x]$.

Mude de Folha

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -4x + y + 2z = -2 \\ 2x + (2a + 1)y = b \end{cases}.$$

- (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros a e b .
- (b) Considere $a = -1$ e $b = 2$.
 - (i) Determine o conjunto das soluções.
 - (ii) Indique duas soluções do sistema.

Mude de Folha

8. Seja A uma matriz real de ordem n .

- (a) Mostre que o conjunto das soluções do sistema homogéneo $AX = 0_{n \times 1}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.
- (b) Justifique que se X_1 e X_2 são duas soluções do sistema $AX = 0_{n \times 1}$ então $\alpha X_1 + \beta X_2$ também é solução do sistema, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 29 de Novembro de 2006

Uma resolução

1. D
2. D
3. B
4. D
5. D

6. a) Começemos por verificar em que condições um vector u do espaço $\mathbb{R}_2[x]$ pertence ao conjunto A . Temos,

$$\begin{aligned} u \in A &\Leftrightarrow u \in \mathbb{R}_2[x] \wedge u = ax^2 + bx + c \wedge a + c = 0 \wedge a + b = c \\ &\Leftrightarrow u \in \mathbb{R}_2[x] \wedge u = ax^2 + bx + c \wedge a = -c \wedge b = 2c \\ &\Leftrightarrow u \in \mathbb{R}_2[x] \wedge u = (-c)x^2 + (2c)x + c \wedge c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow u = c(-x^2 + 2x + 1) \wedge c \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow u \in \langle -x^2 + 2x + 1 \rangle. \end{aligned}$$

Sabemos por um resultado da teórica, que num espaço vectorial E o conjunto de todas as combinações lineares de uma sequência de vectores de E é um subespaço vectorial de E .

Dado que provámos acima que $A = \langle -x^2 + 2x + 1 \rangle$ ou seja, que A é o conjunto de todas as combinações lineares do vector $-x^2 + 2x + 1$, podemos concluir que A é um subespaço de $\mathbb{R}_2[x]$.

Alternativamente poderíamos ter provado que o conjunto A verificava as seguintes condições:

- I. $A \subseteq \mathbb{R}_2[x]$.
 - II. $0_{\mathbb{R}_2[x]} = 0x^2 + 0x + 0 \in A$.
 - III. Se $ax^2 + bx + c$ e $a'x^2 + b'x + c'$ pertencem a A então $(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') \in A$.
 - IV. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $ax^2 + bx + c \in A$ então $\alpha(ax^2 + bx + c) \in A$.
- b) Na alínea anterior provámos que $F = \langle -x^2 + 2x + 1 \rangle$. Assim um conjunto de geradores de F pode ser $\{-x^2 + 2x + 1\}$, que é um conjunto com um só gerador.
- c) Seja $u = x^2 + x + 1$. Temos que $u \in \mathbb{R}_2[x]$ e $u \notin A$, dado que relativamente ao vector u se tem $a + c = 2 \neq 0$ e $a + b = 2 \neq c$. Logo $A \neq \mathbb{R}_2[x]$.

7. a) O sistema dado pode ser escrito na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2a+1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ b \end{bmatrix}.$$

Efectuando na matriz ampliada do sistema, a matriz $[A|B]$, transformações elementares sobre linhas, vamos obter uma matriz $[A'|B']$ a partir da qual poderemos fazer a discussão do sistema. Assim

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2a+1 & 0 & b \end{array} \right] \xrightarrow[l_4 + (-2)l_1]{l_2 + 4l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 4a+1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & b-4 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b-4 \\ 0 & 4a+1 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-(4a+1))l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b-4 \\ 0 & 0 & 8a+8 & -4ab+16a-b+10 \end{array} \right] = [A'|B']. \end{aligned}$$

Tendo em conta a matriz $[A'|B']$ concluímos que:

- Se $8a+8 \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, ou seja se $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$, então $r(A) = r([A|B]) = \text{número de incógnitas} = 3$.

Logo, neste caso, o sistema é possível e determinado.

- Se $8a+8 = 0$ e $3b-6 = 0$, isto é, se $a = -1$ e $b = 2$ então

$$r(A) = r([A|B]) = 2 < \text{número de incógnitas} = 3.$$

Logo, neste caso, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $1 = (\text{número de incógnitas} - r(A))$.

- Se $8a+8 = 0$ e $3b-6 \neq 0$, isto é, se $a = -1$ e $b \neq 2$ então $r(A) = 2 < r([A|B]) = 3$.

Logo, neste caso, o sistema é impossível.

b) $a = -1$ e $b = 2$.

i) Para $a = -1$ e $b = 2$ a matriz $[A'|B']$, obtida na alínea anterior, toma a forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Partindo desta matriz, efectuando transformações elementares sobre linhas, determinemos uma matriz em forma de escada reduzida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A''|B''].$$

A matriz $[A''|B'']$ está na forma de escada reduzida. Assim, o conjunto de soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \wedge y = 2z - 2 \wedge z \in \mathbb{R}\} = \{(z, 2z - 2, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

- ii) Dado que o sistema a considerar é possível e indeterminado, para obter duas soluções do sistema, bastará no conjunto soluções determinado na alínea anterior, substituir a incógnita livre (independente) z por dois valores reais, e obter os valores respectivos para as incógnitas básicas (dependentes), que são x e y . Assim, para $z = 0$ vem $x = 0$ e $y = -2$. Temos então a solução $(0, -2, 0)$. Para $z = 1$ vem $x = 1$ e $y = 0$. Obtemos então outra solução que é $(1, 0, 1)$.

8. a) Sejam A uma matriz real de ordem n e F o conjunto das soluções do sistema $AX = 0_{n \times 1}$. Vejamos que são verificadas as quatro condições que garantem que F é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

I. Por definição do conjunto F temos que $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

II. O vector $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0) \in F$ dado que o sistema é homogéneo, logo admite a solução nula.

III. Sejam $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ elementos de F , ou seja duas soluções de $AX = 0_{n \times 1}$. Vejamos que $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) \in F$, ou seja que $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n)$ é também solução do sistema $AX = 0_{n \times 1}$. Ora, $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ e

$$A \begin{bmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{bmatrix} = A \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = 0_{n \times 1}.$$

sendo esta última igualdade consequência de que, por hipótese, $(x_1, \dots, x_n)$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ são soluções.

IV. Finalmente sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, \dots, x_n) \in F$. Então $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ e assim temos

$$A \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} = \alpha A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha 0_{n \times 1} = 0_{n \times 1}.$$

- b) Dado que X_1 e X_2 são duas soluções do sistema $AX = 0_{n \times 1}$, são também dois vectores do subespaço F considerado na alínea anterior. Como $\alpha X_1 + \beta X_2$ é uma combinação linear de dois elementos de F e F é subespaço, concluímos que $\alpha X_1 + \beta X_2$ é também um elemento de F , sendo portanto uma solução do sistema $AX = 0_{n \times 1}$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.