

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g' & h' & i' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{vmatrix} = |A| + |B|$.

[B] $|A| = 4 \begin{vmatrix} a & \frac{1}{4}b & c \\ d & \frac{1}{4}e & f \\ g & \frac{1}{4}h & i \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{4}d & \frac{1}{4}e & \frac{1}{4}f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ \frac{1}{4}d & \frac{1}{4}e & \frac{1}{4}f \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}$.

[C] $|A| = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{2}b & c \\ 2d & e & 2f \\ g & \frac{1}{2}h & i \end{vmatrix}$.

[D] Se $|A| = 2$ então A é invertível e $|5A^{-1}| = 5^3 \times 2$.

2. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (\beta - 3)y + \beta z = 3 \\ 2x - 2y + (\beta + 1)z = \alpha + 4 \\ 3x - 3y + 3z = 3 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.
- ☐ B Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.
- ☐ C Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ então o sistema é possível indeterminado.
- ☐ D Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1 - z, -2, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Existe $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ invertível tal que $\text{adj } A$ tem característica 2.
- ☐ B Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é invertível então $|A| \neq 0$ e $|\text{adj } A| \neq 0$.
- ☐ C Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ não é invertível então $A \text{adj } A$ é a matriz nula.
- ☐ D Se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $|A| = 1$ então A é invertível e $A^{-1} = \text{adj } A$.

4. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $|A_\alpha| = 5(2\alpha - 1)$.
- ☐ B A_α é invertível se, e só se, $\alpha \neq \frac{1}{2}$.
- ☐ C Se $\alpha = \frac{1}{2}$ então A_α tem característica 3.
- ☐ D Se $\alpha = \frac{1}{2}$ e $B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ é invertível então BA_α tem característica inferior a 4.

5. Seja $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes definidas da seguinte forma:

Q é a matriz que se obtém de P trocando as linhas 1 e 2;

R é a matriz que se obtém de Q multiplicando a linha 2 por -5 ;

S é a matriz que se obtém de R adicionando à linha 3 a linha 1.

Em esquema, temos

$$P \xrightarrow{l_1 \longleftrightarrow l_2} Q \xrightarrow{-5l_2} R \xrightarrow{l_3 + l_1} S.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $|S| = 5|P|$.
- ☐ B $|R||Q| = 5|P|^2$.
- ☐ C $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} R$.
- ☐ D Se $S = I_3$ então P é invertível e $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.5] (a) Mostre que $|A_\lambda| = \lambda^3$.
- [2.0] (b) Para $\lambda = 1$, justifique que A_1 é invertível e determine a sua inversa.
- [1.5] (c) Considere o sistema homogéneo $A_\lambda X = 0$. Averigüe se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o referido sistema tenha, pelo menos, duas soluções distintas.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- [1.0] (a) Justifique que A é invertível.
- [1.5] (b) Exprima A^{-1} como produto de matrizes elementares.
- [1.0] (c) Calcule $|A|$ e $|A^{-1}|$.

Mude de Folha

- [2.5] 8. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Considere $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a matriz que se obtém a partir de A quando se multiplica a linha i de A por um real α . Em esquema, temos $A \xrightarrow{\alpha l_i} B$. Mostre que $|B| = \alpha|A|$.

Fim



1. D
2. C
3. A
4. A
5. B
6. (a) Podemos obter $|A_\lambda|$ calculando o determinante de uma matriz A'_λ , obtida a partir de A_λ , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A_\lambda|$ com $|A'_\lambda|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A'_λ seja triangular.

$$|A_\lambda| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{l_2+(-1)l_1} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{l_3+(-1)l_1} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \times \lambda \times \lambda = \lambda^3.$$

- (b) Sabemos que A_1 será invertível se, e só se, $|A_1| \neq 0$.

Como, pela alínea anterior, $|A_1| = 1 \neq 0$ concluímos que A_1 é invertível.

(Alternativamente, podíamos calcular a característica da matriz A_1 . Como $A_1 \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, sabemos que A_1 será invertível se, e só se, $r(A_1) = 3$ (= ordem de A_1).

Se atendermos às matrizes envolvidas no cálculo do determinante da alínea anterior, concluímos que

$$r(A_1) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 2 \\ 1 & 1+1 & 1+2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Logo A_1 é invertível.)

Determinemos a inversa de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Abreviadamente, vamos determinar A_1^{-1} fazendo $[A_1 \mid I_3] \xrightarrow{(linhas)} [I_3 \mid A_1^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A_1 \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{l_2+(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3+(-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{l_2+(-1)l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1+(-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I_3 \mid A_1^{-1}]. \end{aligned}$$

Logo

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Alternativamente, podíamos determinar A_1^{-1} utilizando a matriz $\text{adj } A_1$. Tem-se

$$A_1^{-1} = \frac{1}{|A_1|} \text{adj } A_1 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.)$$

- (c) Sabemos que um sistema homogéneo é sempre possível porque admite, pelo menos, a solução nula (ou equivalentemente, porque a característica da matriz simples do sistema é sempre igual à característica da matriz ampliada).

Observemos que $A_\lambda X = 0$ é um sistema homogéneo a três incógnitas e, portanto, $(0, 0, 0)$ é a solução nula do sistema, isto é,

$$A_\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

O sistema $A_\lambda X = 0$ terá mais do que uma solução se, e só se, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A_\lambda X = 0$ seja indeterminado ou, equivalentemente, existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $r(A_\lambda) < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Pela resolução da alínea (a), sabemos que

$$r(A_\lambda) = r \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 3, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 2, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Logo, para $\lambda = 0$, o sistema $A_\lambda X = 0$ tem, pelo menos, duas soluções distintas.

7. (a) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é o produto de matrizes elementares. Como toda a matriz elementar é invertível e o produto de matrizes invertíveis é ainda uma matriz invertível, concluímos que A é invertível.

- (b) Dado que A é invertível e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$A^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a inversa de uma matriz elementar é ainda uma matriz elementar, exprimimos A^{-1} como produto de matrizes elementares.

- (c) Como o determinante do produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes das matrizes envolvidas, tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 3 = -3.$$

Dado que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, concluímos que $|A^{-1}| = -\frac{1}{3}$.

8. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Aplicando o Teorema de Laplace à linha i de B , obtemos

$$\begin{aligned} |B| &= (\alpha a_{i1})\hat{B}_{i1} + \cdots + (\alpha a_{in})\hat{B}_{in} \\ &= \alpha \left(a_{i1}\hat{B}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{B}_{in} \right). \end{aligned}$$

Como $\hat{B}_{i1} = \hat{A}_{i1}, \dots, \hat{B}_{in} = \hat{A}_{in}$ concluímos, como pretendíamos, que

$$|B| = \alpha \left(a_{i1}\hat{A}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{A}_{in} \right) = \alpha|A|.$$