



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 16 de Dezembro de 2006

TESTE A

1. Considere os subespaços $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = w\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$.
- ☐ B $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F .
- ☐ C $F + G = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2) \rangle$.
- ☐ D Se $\dim F + G = 4$, então $\dim F \cap G = 0$.

2. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $v \in E$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ é linearmente dependente.
- ☐ B $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \subsetneq E$.
- ☐ C $\dim E = n$.
- ☐ D A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ não é uma sequência geradora de E .

3. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo -2 é valor próprio de B .
- ☐ B $B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo 3 é valor próprio de B .
- ☐ C B é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.
- ☐ D O polinómio característico de B é $p(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$.

Continua no verso desta folha

4. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2))$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a matriz da aplicação linear

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $f(1, 1, 0) = (2, -1, 1)$.
- ☐ B $\dim \text{Im } f = r(A)$.
- ☐ C $f(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, 2)$.
- ☐ D Se $P = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = PAP$.
5. seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear sobrejectiva.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\dim E > \dim E'$, então f não é injectiva.
- ☐ B Se $\dim E = \dim E'$, então $\text{Nuc } f \neq \{0_E\}$
- ☐ C $\dim \text{Im } f = \dim E'$.
- ☐ D $\dim \text{Nuc } f = \dim E - \dim E'$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$
 onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 16 de Dezembro de 2006

TESTE B

1. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O polinómio característico de B é $p(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$.
- ☐ B $B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo 3 é valor próprio de B .
- ☐ C $B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo -2 é valor próprio de B .
- ☐ D B é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

2. seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear sobrejectiva.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim \text{Im } f = \dim E'$.
- ☐ B Se $\dim E = \dim E'$, então $\text{Nuc } f \neq \{0_E\}$
- ☐ C $\dim \text{Nuc } f = \dim E - \dim E'$.
- ☐ D Se $\dim E > \dim E'$, então f não é injectiva.

3. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $v \in E$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim E = n$.
- ☐ B $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \subsetneq E$.
- ☐ C A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ não é uma sequência geradora de E .
- ☐ D A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ é linearmente dependente.

Continua no verso desta folha

4. Considere os subespaços $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = w\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$.

☐ B Se $\dim F + G = 4$, então $\dim F \cap G = 0$.

☐ C $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F .

☐ D $F + G = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2) \rangle$.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2))$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a matriz da aplicação linear

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Se $P = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = PAP$.

☐ B $f(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, 2)$.

☐ C $\dim \text{Im } f = r(A)$.

☐ D $f(1, 1, 0) = (2, -1, 1)$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 16 de Dezembro de 2006

TESTE C

1. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2))$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a matriz da aplicação linear

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim \text{Im } f = r(A)$.
- ☐ B $f(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, 2)$.
- ☐ C Se $P = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = PAP$.
- ☐ D $f(1, 1, 0) = (2, -1, 1)$.

2. Considere os subespaços $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = w\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F .
- ☐ B Se $\dim F + G = 4$, então $\dim F \cap G = 0$.
- ☐ C $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$.
- ☐ D $F + G = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2) \rangle$.

3. seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear sobrejectiva.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim \text{Im } f = \dim E'$.
- ☐ B Se $\dim E > \dim E'$, então f não é injectiva.
- ☐ C Se $\dim E = \dim E'$, então $\text{Nuc } f \neq \{0_E\}$
- ☐ D $\dim \text{Nuc } f = \dim E - \dim E'$.

Continua no verso desta folha

4. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A B é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

☐ B $B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo 3 é valor próprio de B .

☐ C O polinómio característico de B é $p(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$.

☐ D $B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo -2 é valor próprio de B .

5. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $v \in E$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\dim E = n$.

☐ B A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ é linearmente dependente.

☐ C A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ não é uma sequência geradora de E .

☐ D $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \subsetneq E$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1, 8 valores;
- Se responder erradamente: -0, 6 valores.

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 16 de Dezembro de 2006

TESTE D

1. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $v \in E$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ não é uma sequência geradora de E .
☐ B A sequência $(e_1, \dots, e_n, v)$ é linearmente dependente.
☐ C $\dim E = n$.
☐ D $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \subsetneq E$.

2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2))$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a matriz da aplicação linear

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim \text{Im } f = r(A)$.
☐ B $f(1, 1, 0) = (2, -1, 1)$.
☐ C Se $P = \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = PAP$.
☐ D $f(1, 1, 1) = (1, 0, 2) + (0, 1, 2)$.

3. Considere os subespaços $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z = w\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F .
☐ B Se $\dim F + G = 4$, então $\dim F \cap G = 0$.
☐ C $F + G = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2) \rangle$.
☐ D $\dim F = 2$ e $\dim G = 2$.

Continua no verso desta folha

4. seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear sobrejectiva.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\dim E > \dim E'$, então f não é injectiva.
- ☐ B $\dim \text{Nuc } f = \dim E - \dim E'$.
- ☐ C $\dim \text{Im } f = \dim E'$.
- ☐ D Se $\dim E = \dim E'$, então $\text{Nuc } f \neq \{0_E\}$

5. Considere a matriz $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A B é semelhante à matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.
- ☐ B $B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo -2 é valor próprio de B .
- ☐ C O polinómio característico de B é $p(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$.
- ☐ D $B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, logo 3 é valor próprio de B .

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.

- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max \{0, \text{cl}_M\},$$

onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 16 de Dezembro de 2006

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4.0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, 2y, 3z).$$

- (a) Indique, justificando, a dimensão do $\text{Nuc } f$.
- (b) Construa a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas, $\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$.
- (c) Indique, justificando, se f é injectiva e/ou sobrejectiva.
- (d) Considere a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (1, 2, 3), (0, -1, 1))$. Usando matrizes de mudança de base, determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Mude de Folha

[4.0] 7. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 16 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios de A e indique a multiplicidade algébrica de cada um deles.
- (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A .
- (c) Indique a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A e justifique que A é diagonalizável.
- (d) Indique uma matriz invertível P para a qual

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

[3.0] 8. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz que verifica:

$$AA^\top = \alpha I_n, \quad \alpha \in K \setminus \{0\}.$$

Mostre que:

- (a) α é valor próprio de $AA^\top$.
- (b) Se X é vector próprio de A associado ao valor próprio β e X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio γ , então X é vector próprio de $AA^\top$ associado ao valor próprio $\beta\gamma$.
- (c) Zero não é valor próprio de A .

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT-UNL

Primeiro Teste – 15 de Novembro de 2006

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	C	D	B	A	B
Versão B	B	B	C	D	D
Versão C	D	D	C	B	C
Versão D	A	B	C	D	D

6. (a) Por definição, $\text{Nuc } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4}\}$. Então, os elementos do $\text{Nuc } f$ são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Assim, $\text{Nuc } f = \{(0, 0, 0)\}$, donde $\dim \text{Nuc } f = 0$.

- (b) Sendo $b.c.\mathbb{R}^4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, temos:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 1, 2, 0) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3 + 0e_4,$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1, 0, 3) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 3e_4. \text{ Assim,}$$

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (c) Como foi visto em (a), $\dim \text{Nuc } f = 0$, donde f é injectiva. Por outro lado, atendendo ao teorema das dimensões:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f,$$

donde $\dim \text{Im } f = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Logo, f não é sobrejectiva.

- (d) Consideremos o esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccc} b.c. & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 & b.c. \\ & \uparrow id & \nearrow f \\ \mathcal{B} & \mathbb{R}^3 & & \end{array}$$

Sendo $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$ e $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3)$, tem-se

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^4) = AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico de A :

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 16 & -8 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda),$$

tendo em conta que se trata do determinante de uma matriz triangular inferior. Por outro lado, $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$, donde os valores próprios de A são 1 e -1. Além disso, m.a.(1)=2 e m.a.(-1)=1.

- (b) O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é $M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3)X = 0\}$. Considerando a matriz simples do sistema em causa,

$$A - 1I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - 4l_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}l_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, M_1 é o conjunto-solução do sistema $\begin{cases} a - \frac{1}{2}b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}b \\ b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$, donde

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Os vectores $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes, já que não são múltiplos um do outro.

Logo, $\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1 .

Procedendo de forma análoga em relação ao valor próprio -1, temos

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3)X = 0\}.$$

Da matriz $A - (-1)I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 2 \end{bmatrix}$, obtemos a forma de escada reduzida $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que

corresponde ao sistema $\begin{cases} a = 0 \\ b - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{4}c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Assim, $M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Como $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, trata-se de um vector linearmente independente, pelo que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_{-1} .

- (c) temos m.g.(1)=dim M_1 =2 e m.g.(-1)=dim M_{-1} =1. Por outro lado, m.g.(1)+m.g.(-1)=2+1=ordem de A , donde A é diagonalizável.

(d) Atendendo às bases encontradas em (b), basta considerar, por exemplo, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. (a) Por hipótese, $AA^\top = \alpha I_n \Rightarrow AA^\top - \alpha I_n = 0 \Rightarrow |AA^\top - \alpha I_n| = 0$. Logo, α é raiz do polinómio característico de $AA^\top$, donde α é valor próprio de $AA^\top$.

- (b) Se X é vector próprio de A associado ao valor próprio β , então $AX = \beta X$. Por outro lado, se X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio γ , temos $A^\top X = \gamma X$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} AA^\top X &= A(A^\top X) \\ &= A(\gamma X) \\ &= \gamma(\beta X) \\ &= (\gamma\beta)X \\ &= (\beta\gamma)X, \end{aligned}$$

donde X é vector próprio de $AA^\top$ associado ao valor próprio $\beta\gamma$.

- (c) Como, por hipótese, $AA^\top = \alpha I_n \Leftrightarrow A(\alpha^{-1}A^\top) = I_n$, temos que A é invertível, com $A^{-1} = \alpha^{-1}A^\top$. Então zero não é valor próprio de A .