Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 17 de Janeiro de 2007

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_______________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$f(a,b) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & a+1 \end{bmatrix}$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$g(a,b) = (a-b, -2b)$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$h(ax^2+bx+c) = 2a+b+c$, para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

A f não é linear, mas g é linear.

B f não é linear, mas h é linear.

C f e h não são lineares.

D g e h são lineares.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,2,0),(0,0,-1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1,0),(1,2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Apenas</u> uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $f(0,2,0) = (2,2)$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(0,2,-1) \neq f(0,2,0) + f(0,0,-1)$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(0,0,-1) = f(0,2,0)$.

$\boxed{\text{D}}$ f não é injectiva.

3. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \langle (1,2,3),(0,0,4) \rangle \ \text{ e } \ G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b = 0\}.$$

<u>Apenas</u> uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\dim F = 2 = \dim G$.

$\boxed{\text{B}}$ $((-2,1,0),(0,0,1))$ é uma base de G.

$\boxed{\text{C}}$ $F + G = \langle (1,2,3),(0,0,4),(-2,1,0),(0,0,1) \rangle \neq \langle (1,2,3),(-2,1,0),(0,0,1) \rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim(F \cap G) = 1$ e $(0,0,4) \in (F \cap G)$.

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e X e Y vectores próprios de A associados ao mesmo valor próprio α.

<u>Apenas</u> uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ não é vector próprio de A.

$\boxed{\text{B}}$ Qualquer que seja $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, kX é vector próprio de A.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é invertível então zero <u>não</u> é valor próprio de A.

$\boxed{\text{D}}$ Se $X + Y \neq 0$ então $X + Y$ não é vector próprio de A.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos $A = (-1,1,3)$, $B = (0,2,-1)$ e $C = (0,0,1)$.

<u>Apenas</u> uma das afirmações seguintes é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $x + 1 = y - 1 = \frac{z-3}{-4}$ são equações normais da recta que passa pelos pontos A e B.

$\boxed{\text{B}}$ $3x + y + z - 1 = 0$ é uma equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C.

$\boxed{\text{C}}$ Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo cuja área é $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

$\boxed{\text{D}}$ Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ definem um paralelogramo em que $D = (1,1,-3)$ é o outro vértice.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 17 de Janeiro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(a,b,c,d) = (a-b, c+d), \quad \text{qualquer que seja} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

[1.0] (a) Justifique que $\operatorname{Nuc} f = \langle (1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle$.

[1.0] (b) Mostre que f não é injectiva, mas é sobrejectiva.

[1.0] (c) Considerando em $\mathbb{R}^4$ a base $\mathcal{B}_1 = ((1,1,0,0), (0,0,-1,1), (0,1,0,0), (0,0,0,-1))$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_1' = ((0,2), (-1,0))$, determine a matriz da aplicação linear f em relação a tais bases, $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')$.

[1.5] (d) A partir de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')$ obtenha $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2')$ onde

$$\mathcal{B}_2 = ((2,2,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,-1), (0,0,3,-3)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2' = ((0,1), (-1,0)).$$

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Justifique que o seu polinómio característico é $p(x) = |A - xI_3| = (1-x)^2(2-x)$.

[2.0] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Demonstre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

8. Demonstre que

[1.0] (a) se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível então o termo constante do seu polinómio característico é diferente de zero;

[1.5] (b) se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são semelhantes então têm o mesmo polinómio característico.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 17 de Janeiro de 2007

Uma resolução

1. C

2. B

3. C

4. D

5. C

6. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc} f &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : f(a,b,c,d) = (0,0)\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a-b, c+d) = (0,0)\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a-b = 0 \wedge c+d = 0\} \\
&= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = b \wedge c = -d\} \\
&= \{(b,b,-d,d) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(b,b,0,0) + (0,0,-d,d) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b(1,1,0,0) + d(0,0,-1,1) : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle.
\end{aligned}$$

(b) Como vimos na alínea (a) $\mathrm{Nuc}\, f = \langle (1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle \neq \{(0,0,0,0)\}$, logo f não é injectiva.

No que diz respeito à $\mathrm{Im} f$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im} f &= \{f(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\} \\
&= \{(a-b, c+d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(a,0) + (-b,0) + (0,c) + (0,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(1,0) + b(-1,0) + c(0,1) + d(0,1) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0), (-1,0), (0,1), (0,1) \rangle \\
&= \langle (1,0), (-1,0), (0,1) \rangle = \langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Logo f é sobrejectiva.

(c) Tem-se

$$\begin{aligned}
f(1,1,0,0) &= (0,0) &&= \mathbf{0}(0,2) + \mathbf{0}(-1,0) \\
f(0,0,-1,1) &= (0,0) &&= \mathbf{0}(0,2) + \mathbf{0}(-1,0) \\
f(0,1,0,0) &= (-1,0) &&= \mathbf{0}(0,2) + \mathbf{1}(-1,0) \\
f(0,0,0,-1) &= (0,-1) &&= -\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(0,2) + \mathbf{0}(-1,0)
\end{aligned}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{B}_2 & Q & \mathcal{B}_1 & A & \mathcal{B}_1' & P & \mathcal{B}_2' \end{array}$$

em que $Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')$ e $P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2')$. Então $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') = PAQ$. Ora

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(2,2,0,0) & = & (2,2,0,0) & = & \mathbf{2}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,1,0,0) & = & (0,1,0,0) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{1}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,0,0,-1) & = & (0,0,0,-1) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{1}(0,0,0,-1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}(0,0,3,-3) & = & (0,0,3,-3) & = & \mathbf{0}(1,1,0,0) + -\mathbf{3}(0,0,-1,1) + \mathbf{0}(0,1,0,0) + \mathbf{0}(0,0,0,-1) \end{array}$$

pelo que

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(0,2) & = & (0,2) & = & \mathbf{2}(0,1) + \mathbf{0}(-1,0) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(-1,0) & = & (-1,0) & = & \mathbf{0}(0,1) + \mathbf{1}(-1,0) \end{array}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. (a) Ora

$$A - xI_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{aligned} p(x) &= |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(2-x)(1-x) = (1-x)^2(2-x). \end{aligned}$$

(b) Os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico logo, pelo que vimos na alínea (a), a matriz tem os valores próprios 1 e 2.

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 1I_3)X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente pois nenhum dos vectores é combinação linear do outro logo, como é uma sequência geradora de M_1, tem-se

$$\text{Base de } M_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é:

$$\begin{aligned} M_2 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3)X = 0_{3\times 1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 2I_3)X = 0_{3\times 1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente pois $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ logo, como é uma sequência geradora de M_2, tem-se

$$\text{Base de } M_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(c) Da alínea anterior concluímos que $\mathrm{mg}(1) = \dim M_1 = 2$ e $\mathrm{mg}(2) = \dim M_2 = 1$. Assim, a matriz A é diagonalizável pois $\mathrm{mg}(1) + \mathrm{mg}(2) = 2 + 1 = 3 =$ ordem de A. Um exemplo de matriz diagonalizante de A é a matriz invertível

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, nesse caso, obteremos

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Seja $p_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$ o polinómio característico de A. O termo constante do polinómio característico de A é dado por $a_0 = p_A(0) = |A - 0I_n| = |A|$. Por hipótese A é invertível, donde $|A| \neq 0$, logo $a_0 \neq 0$.

(b) Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são semelhantes então existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$. Ora

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - xI_n| = |P^{-1}AP - xI_n| = |P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP| \\ &= |P^{-1}(A - xI_n)P| = |P^{-1}||A - xI_n||P| = |P^{-1}||P||A - xI_n| \\ &= |P^{-1}P||A - xI_n| = |I_n||A - xI_n| = |A - xI_n| \\ &= p_A(x), \end{aligned}$$

e portanto A e B têm o mesmo polinómio característico.