Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 13 de Janeiro de 2007

Escolha Múltipla

1. Considere os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = w\} \quad \text{e} \quad G = \langle (2,-2,3,0) \rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge z - \frac{3}{2}x = 0 \wedge w = 0\}$.

B $F + G = \langle (-1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,0,0,1) \rangle$.

C $G \cap F = \langle (1,-1,-\frac{3}{2},0) \rangle$.

D O vector $(1,-1,-\frac{3}{2},0)$ pertence a $F \cup G$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ o endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que

$f(1,0,-2,3) = 2(1,0,-2,3)$, $f(0,2,3,-1) = (0,4,6,-2)$,

$f(1,0,0,2) = (0,0,0,0)$ e $f(0,0,4,4) = (0,0,2,2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(0,0,4,4)$ é um vector próprio de f.

B $\frac{1}{2}$ é valor próprio de f.

C O polinómio característico de f é $x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 6x^2 - 2x$.

D $\mathrm{Nuc} f = \langle (1,0,0,2), (3,0,1,0) \rangle$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c,d) = (a+b, -c-d, d), \quad \text{para todo} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ e existe uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B $\mathrm{Im} f = \langle (1,2,0), (1,0,0), (2,0,1) \rangle$.

C Se considerarmos a base $\mathcal{B} = ((1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0))$ de $\mathbb{R}^4$ e a base $\mathcal{B}' = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ então

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

D $\mathrm{Nuc} f = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + b = 0 \wedge c = d = 0\}$.

Continua no verso desta folha

4. No espaço afim euclidiano $\mathbb{R}^3$ seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos $A = (-1, 0, 4)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (-2, 3, 1)$.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ O ponto $(5, -1, 2)$ é um ponto da recta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector $\overrightarrow{AB}$.

   $\boxed{\text{B}}$ Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são ortogonais.

   $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 9e_1 + 12e_2 + 9e_3$.

   $\boxed{\text{D}}$ O vector $w = e_1 + e_3$ é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$.

5. Sejam $\mathcal{B}_1 = ((0,1,0), (1,0,0), (0,0,1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0), (0,0,1), (0,1,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Considere o endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = A$.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $f(0,1,0) = (1, -1, 0)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:__________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Notas

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,8$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,6$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_M}\},$$

onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Segundo Teste – 13 de Janeiro de 2007

Segunda Parte

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

6. Considere os subespaços vectoriais $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + w = 0 \wedge x - y - z = 0\}$ e $G = \langle (1, 0, 0, 1), (-1, -1, 1, -3), (1, -1, 1, -1) \rangle$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$.

(a) Calcule a dimensão de F.

(b) Determine uma base de $F + G$.

(c) Caracterize o subespaço $F \cap G$.

(d) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de G.

(e) Averigúe se $(1, 0, 5, 0) \in G$.

Mude de Folha

7. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a - b, a + d, d - b), \quad \text{para todo} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Mostre que f é uma aplicação linear.

(b) Mostre que $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)))$.

(d) Averigúe se f é sobrejectiva.

(e) Determine uma base de $\mathrm{Nuc} f$.

Mude de Folha

8. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$, com E de dimensão finita, e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear tal que $0 < \dim \mathrm{Nuc} f < \dim E$. Mostre que $\dim E = \dim \mathrm{Nuc} f + \dim \mathrm{Im} f$.

`Sugestão`: Comece por considerar $(v_1, \ldots, v_p)$ uma base de $\mathrm{Nuc} f$.

Fim

UMA RESOLUÇÃO

1. C

2. D

3. C

4. A

5. D

6. **a)** Para determinar a dimensão do subespaço F comecemos por determinar uma sequência geradora de F. Dado que temos o referido subespaço caracterizado por condições, teremos de resolver o respectivo sistema de equações. Assim vem,

$$\begin{cases} x - 3y + w = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -x + 3y \\ z = x - y \end{cases}$$

O sistema é indeterminado de grau 2, sendo w, z as incógnitas básicas e x, y as incónitas independentes. Temos então,

$$\begin{aligned} (x,y,z,w) \in F \;\Leftrightarrow\; (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,\wedge\, (x,y,z,w) &= (x,y,x-y,3y-x) \\ &= (x,0,x,-x) + (0,y,-y,3y) \\ &= x(1,0,1,-1) + y(0,1,-1,3), \end{aligned}$$

onde x e y variam livremente em $\mathbb{R}$. Logo $F = \langle (1,0,1,-1),(0,1,-1,3) \rangle$.

Dado que a sequência de vectores ((1,0,1,-1),(0,1,-1,3)) é uma sequência linearmente independente, pois é contituída por 2 vectores não nulos em que o primeiro vector não é combinação linear do segundo, e é geradora de F, concluímos que se trata de uma base de F. Portanto $dim\ F = 2$.

b) Dado que se tem

$$(-1,-1,1,-3) = -2(1,0,0,1) + 1(1,-1,1,-1)$$

temos

$$G = \langle (1,0,0,1),(1,-1,1,-1) \rangle.$$

Por outro lado vimos na alínea anterior que,

$$F = \langle (1,0,1,-1),(0,1,-1,3) \rangle.$$

Dado que se obtém uma sequência geradora do subespaço $F+G$ fazendo a união de um conjunto de geradores de F com um conjunto de geradores de G, concluímos que

$$F + G = \langle (1,0,1,-1),(0,1,-1,3),(1,0,0,1),(1,-1,1,-1) \rangle.$$

Se colocarmos estes quatro vectores sobre as linhas de uma matriz, e fizermos transformações elementares até obter uma forma de escada da matriz, sabemos que as linhas não nulas dessa última matriz constituem uma base de $F+G$. Então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 - l_1]{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 + l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim concluímos que $((1,0,1,-1),(0,1,-1,3),(0,0,-1,2),(0,0,0,1))$ é uma base de $F+G$ e que a dimensão do subespaço $F+G$ é igual a 4.

Como $F + G \subseteq \mathbb{R}^4$ e $dim\ F + G = dim\ \mathbb{R}^4$, concluímos que $F + G = \mathbb{R}^4$.

c) Sabemos que $dim\ G = 2$ pois $r(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}) = 2$ e que

$$dim\ F + G = dim\ F + dim\ G - dim\ F \cap G,$$

donde $4 = 2 + 2 - dim\ F \cap G$. Assim $dim\ F \cap G = 0$. Logo $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$.

Alternativamente poderiamos ter ido achar as condições que caracterizam o subespaço G, que são $z = -y \wedge w = x + 2y$ e então saberiamos que

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + w = 0 \wedge x - y - z = 0 \wedge z + y = 0 \wedge w = x + 2y\} \\ &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = w = 0\} = \langle \emptyset \rangle. \end{aligned}$$

d) Para determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de G vamos usar o método prático de considerar uma matriz A cuja primeiras linhas sejam os vectores de uma base de G e se acrescentam linhas à matriz de forma a obter uma matriz de característica 4.

Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então podemos concluir que $((1,0,0,1),(1,-1,1,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui uma base de G.

e) Vejamos se o vector $(1,0,5,0)$ é combinação linear de uma base de G.

Temos $(1,0,5,0) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,-1,1,-1)$ se, e só se,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\beta = 0 \\ \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Dado que temos um sistema de equações nas incógnitas α e β que é impossível, concluimos que o vector $(1,0,5,0)$ não pertence ao subespaço G.

Alternativamente poderiamos também ver que a característica da matriz, em cuja duas primeiras linhas colocamos uma base de G e na terceira linha colocamos o vector $(1,0,5,0)$, é igual a 3.

7. **a)** Sejam $(a,b,c,d),(a',b',c',d') \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} f((a,b,c,d)+(a',b',c',d')) &= f(a+a', b+b', c+c', d+d') \\ &= ((a+a')-(b+b'), (a+a')+(d+d'), (d+d')-(b+b')) \\ &= ((a-b)+(a'-b'), (a+d)+(a'+d'), (d-b)+(d'-b')) \\ &= (a-b, a+d, d-b) + (a'-b', a'+d', d'-b') \\ &= f((a,b,c,d) + f(a',b',c',d') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\alpha(a,b,c,d)) &= f(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \\ &= (\alpha a - \alpha b, \alpha a + \alpha d, \alpha d - \alpha b) \\ &= (\alpha(a-b), \alpha(a+d), \alpha(d-b)) \\ &= \alpha(a-b, a+d, d-b) \\ &= \alpha f((a,b,c,d), \end{aligned}$$

donde f é uma aplicação linear.

b) Para verificar que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, dado que $\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4, basta ver que é linearmente independente. Isso equivale a provar que a matriz em cujas linhas estão os 4 vectores de $\mathcal{B}$ tem característica 4. Ora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_4-l_1}{\xrightarrow{l_2-l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4-l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4+l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dado que a última matriz da sequência está em forma de escada concluimos que a matriz A tem característica 4 e que portanto $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

c) Vamos determinar as imagens dos vectores da base $\mathcal{B}$. Ora

$$\begin{aligned} f(1,0,1,0) &= (1,1,0) &&= 1(0,1,0)+0(1,0,1)+1(1,0,0) \\ f(1,1,1,1) &= (0,2,0) &&= 2(0,1,0)+0(1,0,1)+0(1,0,0) \\ f(0,0,0,1) &= (0,1,1) &&= 1(0,1,0)+1(1,0,1)+(-1)(1,0,0) \\ f(1,1,0,0) &= (0,1,-1) &&= 1(0,1,0)+(-1)(1,0,1)+1(1,0,0). \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},(0,1,0),(1,0,1),(1,0,0)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

d) Ora a aplicação linear f é sobrejectiva se, e só se $dim\ Imf = dim\ \mathbb{R}^3$. Por outro lado sabemos que $dim\ Imf = r(A)$, onde A é uma matriz de f. Usando a matriz de f obtida na alínea anterior vamos, através de transformações elementares sobre linhas, transformá-la em forma de escada para assim podermos determinar a sua característica. Temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim temos

$$dim\ Imf = r(A) = 3 = dim\ \mathbb{R}^3,$$

o que prova que f é sobrejectiva.

e) Vamos começar por determinar uma sequência geradora de $Nuc\ f$. Ora

$$\begin{aligned} (a,b,c,d) \in Nuc\ f \quad &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ f(a,b,c,d) = (a-b, a+d, d-b) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \begin{cases} a-b=0 \\ a+d=0 \\ d-b=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \begin{cases} a=b \\ 2b=0 \\ d=b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b,c,d) = (0,0,c,0) = c(0,0,1,0), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donde temos que $Nuc\ f = \langle (0,0,1,0) \rangle$.

Como ((0,0,1,0)) é uma sequência com apenas um vector não nulo, é linearmente independente. Logo, como é geradora de $Nuc\ f$, é uma base de $Nuc\ f$.

8. Ver na sebenta de Alga, página 173, a demonstração do teorema 5.11 (Teorema da dimensão).