

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Atenção

- Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,8 valores;
 - Se responder erradamente: -0,6 valores.
- A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3))$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2).$

☐ B $(2, 3, 2) \in \text{Nuc } f.$

☐ C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$

☐ D $f(1, 0, 1) = (3, 3, -6).$

2. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ considere os subespaços

$$F = \langle (3, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b - 2c = 0 \}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F \cap G \neq \langle (3, 2, 1) \rangle$.
☐ B $\dim G = 2$.
☐ C $\dim(F + G) = 3$.
☐ D $G = \langle (1, 0, 0), (0, 2, 1), (1, 4, 2) \rangle$.

3. Considere os espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(a, b) = (a - b, -a + b, a - b)$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $(3, 3) \in \text{Nuc } f$.
☐ B f não é injectiva.
☐ C $\text{Im } f = \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle$.
☐ D $\dim(\text{Im } f) = 2$.

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A é diagonalizável.
☐ B $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A .
☐ C Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ então P é invertível e $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
☐ D $|A + 2I_3| \neq 0$.

5. Considere os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$ e $C = (2, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais.
☐ B $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$.
☐ C Os pontos A , B e C definem um triângulo cuja área é $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
☐ D $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ não é uma base ortogonal do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.0] (a) Calcule os valores próprios de A .
- [2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A .
- [1.5] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(a, b, c) = (a + b + c, a - b - c)$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- [1.0] (a) Determine uma base de $\text{Nuc } f$.
- [2.0] (b) Considerando em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 4))$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 0))$, determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

- [1.5] 8. (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $F = \{Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : YA = AY\}$. Mostre que F é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- [2.0] (b) Considere o espaço vectorial real $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine uma base de

$$G = \left\{ Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : Y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y \right\}.$$

Fim

1. C
2. A
3. D
4. D
5. D
6. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (2-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (2-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1) = (2-\lambda)(-2+\lambda)\lambda.
 \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 2.

- (b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 + (-1)l_2]{\frac{1}{2}l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = -c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente ($r \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$).

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ c \\ c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente independente ($\text{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$).

- (c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Atendendo à resolução da alínea anterior, temos que $\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1$ e $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$. Como $\text{mg}(0) + \text{mg}(2) = 3 = \text{ordem de } A$, concluimos que A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 0, 2 e 2 na diagonal. Por exemplo, se considerarmos a matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, a matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a primeira coluna é o vector da base de M_0 e a segunda e terceira colunas são os vectores da base de M_2 , é invertível e, além disso, $P^{-1}AP = D$.

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a + b + c, a - b - c) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0 \wedge a - b - c = 0\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_1 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge b = -c\} \\ &= \{(0, -c, c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(0, -1, 1) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (0, -1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

A sequência $((0, -1, 1))$ é uma base de $\text{Nuc } f$ porque gera $\text{Nuc } f$ e é linearmente independente ($\text{r} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$).

- (b) Como

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= (3, -1) = (-1)(1, 1) + 4(1, 0) \\ f(0, 2, 2) &= (4, -4) = (-4)(1, 1) + 8(1, 0), \\ f(0, 0, 4) &= (4, -4) = (-4)(1, 1) + 8(1, 0) \end{aligned}$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, temos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

8. (a) Verifiquemos que $F = \{Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : YA = AY\}$ é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

. Atendendo à definição de F conclui-se que $F \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

. $0_{n \times n} \in F$ porque $0_{n \times n}A = A0_{n \times n}$.

. Sejam $X, Y \in F$. Vejamos que $X + Y \in F$.

Como $X, Y \in F$ tem-se $XA = AX$ e $YA = AY$. Assim, tem-se

$$(X + Y)A = XA + YA = AX + AY = A(X + Y).$$

Logo, $X + Y \in F$.

. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $Y \in F$. Vejamos que $\alpha Y \in F$.

Como $Y \in F$ tem-se $YA = AY$. Assim, tem-se

$$(\alpha Y)A = \alpha(YA) = \alpha(AY) = A(\alpha Y).$$

Logo, $\alpha Y \in F$.

Concluimos, portanto, que F é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(b) Como

$$\begin{aligned} G &= \left\{ Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : Y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = a+c \wedge a = b+d \wedge c = 0 \wedge c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = b+d \wedge c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

concluimos que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de G pois gera G e é linearmente independente ($\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \alpha = \beta = 0$).