FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame de Recurso – 14 de Fevereiro de 2008

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: ____

____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

---

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ O elemento da posição $(1,3)$ da matriz $A^T B + 2C$ é 4.

$\boxed{\text{B}}$ A matriz B está em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{C}}$ A matriz C é invertível.

$\boxed{\text{D}}$ Se $I_3 \xrightarrow[l_3+2l_1]{} E$, isto é, se E resulta de I_3 somando à linha 3 a linha 1 multiplicada por 2 então

$$EC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Continua no verso desta folha

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $|A| = \beta \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\begin{vmatrix} a-\alpha d & b-\alpha e & c-\alpha f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -\beta$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

B $|-A^T| = \beta$.

C A é invertível e $|2A^{-1}| = \frac{8}{\beta}$.

D Se A tem o valor próprio α então $\alpha \neq 0$ e $|\alpha^{-1}A - I_3| = 0$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c) = (0, 2b, b-c), \text{ para qualquer } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$$

e sejam $\mathcal{B} = ((3,0,2), (-2,2,2), (0,0,4))$ e $\mathcal{B}' = ((0,0,2), (0,1,0), (-1,0,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A f não é sobrejectiva nem injectiva.

B O núcleo de f é $\langle (0,2,1), (0,0,-1) \rangle$.

C $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}',\mathcal{B})\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}',\mathcal{B})$

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares $AX = B$ de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$, com a amtriz ampliada $[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 2\beta \end{array}\right]$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.

B Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível e indeterminado e o conjunto das soluções é $S = \{(-d, b, c, d) : \ b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

C Se $\alpha \neq 0$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistem é possível e indeterminado, mas o grau de indeterminação depende de β.

D Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é $S = \{(0,0,c,0) : \ c \in \mathbb{R}\}$.

5. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação geral

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

e a recta $\mathcal{R}$ de equação vectorial

$$(x,y,z) = (0,2,0) + \lambda(0,-1,1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A recta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ intersectam-se segundo um ponto, cujas coordenadas são $(0, \frac{5}{4}, \frac{3}{4})$.

B $A = (0,0,2)$ e $B = (0,1,1)$ são dois pontos da recta $\mathcal{R}$ e $C = (0,-1,0)$ é um ponto do plano $\mathcal{P}$.

C O ângulo da recta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$ é igual a $\arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

D Os pontos $A = (0,0,2)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (0,-1,0)$ são os vértices de um triângulo de área $\frac{1}{2}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame de Recurso – 14 de Fevereiro de 2008

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (1,0,2,0), (0,0,1,0) \rangle$$

e

$$G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a = 2b \ \wedge \ c - d = 0\}.$$

[1.5] (a) Indique uma base $\mathcal{B}$ de F e uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua todos os vectores de $\mathcal{B}$.

[1.5] (b) Determine uma base de G e uma base de $F + G$.

[1.0] (c) Mostre que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine

[1.0] (a) os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas;

[1.5] (b) os subespaços próprios de A;

[1.5] (c) se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, em caso afirmativo, indique uma matriz P nessas condições.

Mude de Folha

[1.5] **8.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz hemi-simétrica. Mostre que α é valor próprio de A se, e só se, o mesmo sucede a $-\alpha$.

Mude de Folha

[1.5] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, com característica r, $r > 0$. Mostre que existem matrizes invertíveis $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ e $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Note que se $r = m$ ou $r = n$ algumas das matrizes nulas podem não existir).

Fim