



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Respostas

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

-
-
1. Sejam $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $ABC \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B $A + C^T \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ C $r(A) \leq 2$ e $r(B) \leq 3$.
- ☐ D O máximo de linhas não nulas da matriz em forma de escada de $BC + A^T$ é dois.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $k = 0 \vee k = 1$, então A não é invertível.
- ☐ B $\det A = -2k^2 + 2k$.
- ☐ C Se $k = 0$, então para $X \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer.
- ☐ D $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k$.

3. Considere o conjunto $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \wedge d = 2c\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F = \{(2x, x, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ B $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2))$ é uma base de F e, portanto, $\dim F = 2$.
- ☐ C Se $G = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, então $F + G = \mathbb{R}^4$.
- ☐ D Para $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d\}$, tem-se $\dim F \cap H = 2$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (2a, a + b, a - b, c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A aplicação f é injectiva.
- ☐ B $((2, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Im } f$.
- ☐ C Se $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$, então $r(A) = 4$.
- ☐ D A aplicação f não é sobrejectiva.

5. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (0, 3, 0)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Considere as rectas AB e AC . Então $\angle(AB, AC) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.
- ☐ B O volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BO}$ é 3.
- ☐ C Se $P = (-1, -2, -1)$, então a distância do plano que passa nos pontos A, B e C ao ponto P é 3.
- ☐ D A, B, C e D são pontos coplanares, isto é, A, B, C e D pertencem ao mesmo plano.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

EXAME B

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

-
-
1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (2a, a + b, a - b, c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A aplicação f não é sobrejectiva.
- ☐ $((2, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Im } f$.
- ☐ A aplicação f é injectiva.
- ☐ Se $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$, então $r(A) = 4$.

Continua no verso desta folha

2. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (0, 3, 0)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $P = (-1, -2, -1)$, então a distância do plano que passa nos pontos A, B e C ao ponto P é 3.
- ☐ B O volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BO}$ é 3.
- ☐ C Considere as rectas AB e AC . Então $\angle(AB, AC) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.
- ☐ D A, B, C e D são pontos coplanares, isto é, A, B, C e D pertencem ao mesmo plano.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det A = -2k^2 + 2k$.
- ☐ B Se $k = 0$, então para $X \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer.
- ☐ C $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k$.
- ☐ D Se $k = 0 \vee k = 1$, então A não é invertível.

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $A + C^\top \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B O máximo de linhas não nulas da matriz em forma de escada de $BC + A^\top$ é dois.
- ☐ C $ABC \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ D $\text{r}(A) \leq 2$ e $\text{r}(B) \leq 3$.

5. Considere o conjunto $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \wedge d = 2c\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2))$ é uma base de F e, portanto, $\dim F = 2$.
- ☐ B Se $G = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, então $F + G = \mathbb{R}^4$.
- ☐ C Para $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d\}$, tem-se $\dim F \cap H = 2$.
- ☐ D $F = \{(2x, x, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

EXAME C

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

-
-
1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (2a, a + b, a - b, c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $((2, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Im } f$.
- ☐ B Se $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$, então $r(A) = 4$.
- ☐ C A aplicação f não é sobrejectiva.
- ☐ D A aplicação f é injectiva.

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $A + C^T \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B O máximo de linhas não nulas da matriz em forma de escada de $BC + A^T$ é dois.
- ☐ C $ABC \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ D $r(A) \leq 2$ e $r(B) \leq 3$.

Continua no verso desta folha

3. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (0, 3, 0)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $P = (-1, -2, -1)$, então a distância do plano que passa nos pontos A, B e C ao ponto P é 3.
- ☐ B A, B, C e D são pontos coplanares, isto é, A, B, C e D pertencem ao mesmo plano.
- ☐ C O volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BO}$ é 3.
- ☐ D Considere as rectas AB e AC . Então $\angle(AB, AC) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

4. Considere o conjunto $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \wedge d = 2c\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $G = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, então $F + G = \mathbb{R}^4$.
- ☐ B $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2))$ é uma base de F e, portanto, $\dim F = 2$.
- ☐ C Para $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d\}$, tem-se $\dim F \cap H = 2$.
- ☐ D $F = \{(2x, x, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det A = -2k^2 + 2k$.
- ☐ B Se $k = 0 \vee k = 1$, então A não é invertível.
- ☐ C $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k$.
- ☐ D Se $k = 0$, então para $X \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer.

**Álgebra Linear e Geometria Analítica C**

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

EXAME D

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Respostas

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k$.

☐ B Se $k = 0 \vee k = 1$, então A não é invertível.

☐ C Se $k = 0$, então para $X \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer.

☐ D $\det A = -2k^2 + 2k$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (2a, a + b, a - b, c), \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $((2, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Im } f$.

☐ B A aplicação f é injectiva.

☐ C A aplicação f não é sobrejectiva.

☐ D Se $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$, então $r(A) = 4$.

Continua no verso desta folha

3. Sejam $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $A + C^T \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B O máximo de linhas não nulas da matriz em forma de escada de $BC + A^T$ é dois.
- ☐ C $r(A) \leq 2$ e $r(B) \leq 3$.
- ☐ D $ABC \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

4. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (0, 3, 0)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A, B, C e D são pontos coplanares, isto é, A, B, C e D pertencem ao mesmo plano.
- ☐ B Considere as rectas AB e AC . Então $\angle(AB, AC) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.
- ☐ C Se $P = (-1, -2, -1)$, então a distância do plano que passa nos pontos A, B e C ao ponto P é 3.
- ☐ D O volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BO}$ é 3.

5. Considere o conjunto $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \wedge d = 2c\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $G = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$, então $F + G = \mathbb{R}^4$.
- ☐ B $F = \{(2x, x, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ C Para $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d\}$, tem-se $\dim F \cap H = 2$.
- ☐ D $((2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 2))$ é uma base de F e, portanto, $\dim F = 2$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4.0] 6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(a, b, c) = (a, b, a + b, -2a), \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ uma base de $\mathbb{R}^4$.

- (a) Determine $A = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$, onde $b.c._{\mathbb{R}^3}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Indique $r(A)$ e conclua sobre a sobrejectividade de f .
- (c) Determine uma base de $\text{Nuc } f$. Pode afirmar-se que f é injectiva? Porquê?
- (d) Utilizando matrizes de mudança de base, determine $B = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, b.c._{\mathbb{R}^4})$, onde $b.c._{\mathbb{R}^4}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Mude de Folha

[3.0] 7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

- (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) Indique uma base para cada um dos subespaços próprios de A .
- (c) Diga qual a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A . A matriz A é diagonalizável? Porquê?

Mude de Folha

[2.5] 8. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $F_k = \langle (1, 0, k), (0, 1, 1), (1, 1, 3) \rangle$ subespaço de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Determine k de modo que $\dim F_k = 2$.
- (b) Para $k = 2$ e $G = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 2) \rangle$ indique, justificando, uma base de $F_2 + G$ e $\dim F_2 \cap G$.

Mude de Folha

[3.0] 9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + A^\top = kI_n$, $k \in \mathbb{R}$. Mostre que:

- (a) Se X é vector próprio de A associado ao valor próprio α , então X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $k - \alpha$.

- (b) Se A é diagonalizável, com $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$, onde $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível, então $A^\top$ é diagonalizável e $P^{-1}A^\top P = \begin{bmatrix} k - \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k - \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k - \alpha_n \end{bmatrix}$.

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Exame de Recurso – 9 de Fevereiro de 2008

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	B	C	D	C	A
Versão B	D	C	B	A	C
Versão C	B	A	D	C	D
Versão D	C	D	A	B	C

6. (a) Tem-se

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1, -2) = \mathbf{1}(1, 0, 1, -2) + \mathbf{0}(0, 1, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0) = \mathbf{0}(1, 0, 1, -2) + \mathbf{1}(0, 1, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 0, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}(1, 0, 1, -2) + \mathbf{0}(0, 1, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 0, 1).$$

$$\text{Assim, } \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Como a matriz A obtida na alínea anterior está em forma de escada podemos afirmar que $r(A) = 2$. Por outro lado, atendendo a que $\mathbb{R}^4$ é o espaço de chegada de f e $\dim \text{Im } f = r(A) = 2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$, concluímos que f não é sobrejectiva.

(c) Por definição, $\text{Nuc } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$. Ora,

$$(a, b, a + b, -2a) = (0, 0, 0, 0) \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \\ -2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $\text{Nuc } f = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0, 0, 1) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$. Tendo em conta que $(0, 0, 1)$ é não nulo, $((0, 0, 1))$ é uma base de $\text{Nuc } f$.

Como $\dim \text{Nuc } f = 1 \neq 0$, podemos afirmar que f não é injectiva.

(d) Consideremos o esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} b.c.\mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 & \mathcal{B} \\ & & \uparrow id_{\mathbb{R}^3} & & \downarrow id_{\mathbb{R}^4} & \\ b.c.\mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 & b.c.\mathbb{R}^4 \end{array}$$

Sendo $A = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$, $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^4)$ e $Q = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^3) = I_3$, tem-se

$$B = \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = PAQ.$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}(1, 0, 1, -2) &= \mathbf{1}(1, 0, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1, 0) + (-\mathbf{2})(0, 0, 0, 1) \\ (0, 1, 1, 0) &= \mathbf{0}(1, 0, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 0) &= \mathbf{0}(1, 0, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 0, 1) &= \mathbf{0}(1, 0, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 1, 0, 0) + \mathbf{0}(0, 0, 1, 0) + \mathbf{1}(0, 0, 0, 1),\end{aligned}$$

$$\text{temos } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$$B = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}p_A(x) = |A - xI_4| &= \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=}_{c_1} (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 3 & -1-x \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Lapl.}}{=}_{c_1} (2-x)(-2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 3 & -1-x \end{vmatrix} = (2-x)(-2-x)[(1-x)(-1-x)-3] \\ &= -(2-x)(2+x)(-1-x+x+x^2-3) = -(2-x)(2+x)(x^2-4) \\ &= -(2-x)(2+x)(x-2)(x+2) = (x+2)^2(x-2)^2.\end{aligned}$$

Assim os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são:

-2 com multiplicidade algébrica igual a 2 e
2 com multiplicidade algébrica igual a 2.

(b) Subespaço próprio associado ao valor próprio -2:

$$M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : (A + 2I_4) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$[A + 2I_4 | 0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_2 \\ \ell_4 - 3\ell_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\ell_1 - \frac{1}{4}\ell_3 \\ \ell_4 - \ell_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned}M_{-2} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : a = -\frac{1}{4}b \wedge c = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.\end{aligned}$$

Dado que $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é geradora de M_{-2} , conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

Subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_4) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} [A - 2I_4 | 0] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_4 + 3\ell_3]{\ell_2 + 4\ell_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\frac{1}{5}\ell_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_2 - 4\ell_3]{\ell_1 - \ell_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 1}(\mathbb{R}) : b = c = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é geradora de M_2 , conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

(c) $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, $\text{mg}(-2) + \text{mg}(2) = 4$ (ordem de A). Ora $\text{mg}(-2) = \dim M_{-2} = 1$ e $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1$. Então $\text{mg}(-2) + \text{mg}(2) = 2 \neq 4$ e portanto A não é diagonalizável.

8. (a) Tem-se que $\dim F_k = 2$ sse $\text{r} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = 2$. Ora,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 - k \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 - k \end{bmatrix},$$

estando esta última matriz em forma de escada. Assim, $\text{r}(A) = 2$ sse $2 - k = 0$ sse $k = 2$.

(b) Se $k = 2$, então $F_2 = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 1) \rangle$ e $\dim F_2 = 2$, pela alínea (a). Atendendo agora a que $((1, 1, 0), (1, 0, 2))$ é um sistema linearmente independente e que $G = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 2) \rangle$, tem-se $\dim G = 2$. Por outro lado,

$$F_2 + G = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle.$$

Ora,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3-l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3-l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

donde $r(B) = 3$. Logo, $((1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ é uma base de $F_2 + G$. Aplicando agora o teorema das dimensões, temos

$$\dim(F_2 \cap G) = \dim F_2 + \dim G - \dim(F_2 + G) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

9. (a) Sabemos que X é vector próprio de A associado ao valor próprio α se $X \neq 0$ e $AX = \alpha X$.

Provar que X é ainda vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $k - \alpha$ é garantir que $A^\top X = (k - \alpha)X$.

Por hipótese temos $A + A^\top = kI_n$ e, por isso, podemos afirmar que $A^\top = -A + kI_n$. Assim, sendo X um vector próprio de A associado ao valor próprio α , temos:

$$\begin{aligned} A^\top X = (-A + kI_n)X &\implies A^\top X = -AX + kI_n X \\ &\implies A^\top X = -\alpha X + kX \\ &\implies A^\top X = (k - \alpha)X, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

- (b) Se A é diagonalizável e $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$, então as colunas de P , $X_1, \dots, X_n$, são

vectores próprios de A associados aos valores próprios, respectivamente, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Pela alínea anterior, sabemos que $X_1, \dots, X_n$ são, ainda, vectores próprios de $A^\top$ associados aos valores próprios, respectivamente, $k - \alpha_1, \dots, k - \alpha_n$. Desta forma, ao efectuarmos o produto $P^{-1}A^\top P$, obtemos uma matriz diagonal em que estes valores próprios aparecem pela mesma ordem que os vectores próprios foram colocados nas colunas da matriz P . Concluimos assim que

$$P^{-1}A^\top P = \begin{bmatrix} k - \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k - \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k - \alpha_n \end{bmatrix}.$$