

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e trinta minutos de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}_2 = ((0,1), (1,1))$ nos espaços vectoriais reais $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $f \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (0, 2).$

☐ B $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Nuc } f.$

☐ C $f \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = f \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$

☐ D f não é injectiva.

2. Para cada $\beta \in \mathbb{R}$ considere a matriz $H_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A H_β é invertível se, e só se, $\beta \neq -2$.
☐ B H_β tem característica 3 se, e só se, $\beta = -2$.
☐ C $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} H_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
☐ D $|H_\beta| = -\beta - 2$.

3. Em $\mathbb{R}^3$ consideremos o referencial canónico. Sejam $\mathcal{R}$ a recta com equação vectorial

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0) + \alpha(2, 1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e $\mathcal{P}$ o plano definido pelos pontos $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$ e $(2, 0, 3)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $x - 2y - z + 1 = 0$ é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.
☐ B $\begin{cases} x - 2z = -1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ é uma representação cartesiana da recta $\mathcal{R}$.
☐ C O ponto $(3, 1, 2)$ é um ponto comum à recta $\mathcal{R}$ e ao plano $\mathcal{P}$.
☐ D O ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao plano $\mathcal{P}$.

4. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ considere, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o subespaço vectorial

$$F_\alpha = \langle (1, 0, 2), (-1, 2, -2), (-1, 4, \alpha) \rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha \neq -2$ então $F_\alpha = \mathbb{R}^3$.
☐ B $(2, 1, 2) \in F_{-2}$.
☐ C $F_{-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = 0\}$.
☐ D Se $\alpha = -2$ então $\dim F_\alpha = 2$.

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x + \beta y + 2z = 3 \\ x + 3y + \alpha z = \beta \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\beta \neq 3$ e $\alpha \neq 1$ então o sistema é possível e determinado.
☐ B Se $\beta \neq 3$ e $\alpha = 1$ então o sistema é impossível.
☐ C Se $\beta = 3$ e $\alpha = 1$ então o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.
☐ D Se $\beta = 3$ e $\alpha \neq 1$ então o conjunto solução do sistema é $\{(3 - 3\lambda, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Calcule $|A|$ e justifique que A é invertível.

[1.5] (b) Determine A^{-1} .

Mude de Folha

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a - b + c, 2a - 2b + 2c),$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.0] (a) Indique uma base de $\text{Nuc } f$.

[1.0] (b) Calcule $\dim \text{Im } f$. A aplicação f é sobrejectiva?

[1.0] (c) Considerando as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((0, 1), (1, 1))$ nos espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Mude de Folha

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A . Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

[1.5] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

9. Sejam E espaço vectorial real e $f : E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $F_\alpha = \{u \in E : f(u) = \alpha u\}$. Prove que:

[1.0] (a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, F_α é subespaço vectorial de E .

[1.5] (b) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \beta$ então $F_\alpha \cap F_\beta = \{0_E\}$.

Fim

1. A
2. C
3. D
4. B
5. C
6. (a) Podemos obter $|A|$ calculando o determinante de uma matriz A' , obtida a partir de A , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A|$ com $|A'|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A' seja triangular.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

(Alternativamente, podíamos calcular $|A|$ utilizando o Teorema de Laplace para o cálculo de determinantes. Por exemplo, tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_2} 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1. \quad)$$

Como $|A| \neq 0$ concluímos que A é invertível.

- (b) Determinemos a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Abreviadamente, vamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow{(\text{linhas})} [I_3 \mid A^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + 2l_3 \\ l_1 + 2l_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_1 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Alternativamente, podíamos determinar A^{-1} utilizando a matriz $\text{adj } A$. Tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad) \end{aligned}$$

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}\text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a - b + c, 2a - 2b + 2c) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0 \wedge 2a - 2b + 2c = 0\}.\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Então,

$$\begin{aligned}\text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b - c\} \\ &= \{(b - c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(b, b, 0) + (-c, 0, c) : b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(1, 1, 0) + c(-1, 0, 1) : b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle.\end{aligned}$$

A sequência $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ é uma base de $\text{Nuc } f$ porque gera $\text{Nuc } f$ e é linearmente independente $(\beta(1, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0)$.

(b) Pela alínea anterior, sabemos que $\dim \text{Nuc } f = 2$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f$ concluímos que $\dim \text{Im } f = 1$.

A aplicação linear f seria sobrejectiva se, e só se,

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2,$$

ou equivalentemente,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Como $\dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^2$ concluímos que f não é sobrejectiva.

(c) Como

$$\begin{aligned}f(1, 0, 0) &= (1, 2) = \mathbf{1}(0, 1) + \mathbf{1}(1, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (-1, -2) = -\mathbf{1}(0, 1) + (-\mathbf{1})(1, 1), \\ f(0, 0, 1) &= (1, 2) = \mathbf{1}(0, 1) + \mathbf{1}(1, 1)\end{aligned}$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, temos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}|A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Lapl.}]{l_2} (5 - \lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda) [(4 - \lambda)^2 - 1] = (5 - \lambda) [(4 - \lambda) - 1] [(4 - \lambda) + 1] \\ &= (5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda) = (5 - \lambda)^2(3 - \lambda).\end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 3 e 5, com $\text{ma}(3) = 1$ e $\text{ma}(5) = 2$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3. Tem-se:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 3I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 + (-1)l_1]{\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = -c \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 pois gera M_3 e é linearmente

independente $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$.

- Seja M_5 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 5. Tem-se:

$$M_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 5I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 5I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_5 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_5 pois gera M_5 e é li-

nearmente independente $(\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \gamma = 0)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(5) = \dim M_5 = 2$.

- (c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Pela alínea anterior, temos $\text{mg}(3) + \text{mg}(5) = 1 + 2 = 3 =$ ordem de A , logo A é diagonalizável.

Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 3, 5 e 5 na diagonal. Considerando a matriz $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ então, por exemplo, a matriz

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde a primeira e terceira colunas são os vectores da base de M_5 e a segunda coluna é o vector da base de M_3 , é invertível e, além disso, $P^{-1}AP = D$.

9. (a) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e verifiquemos que

$$F_\alpha = \{u \in E : f(u) = \alpha u\}$$

é subespaço vectorial de E .

- . Atendendo à definição de F_α conclui-se que $F_\alpha \subseteq E$.
- . $0_E \in F_\alpha$ porque $f(0_E) = \alpha 0_E$. Note-se que $0_E = \alpha 0_E$ e, como $f : E \rightarrow E$ é aplicação linear, tem-se $f(0_E) = 0_E$.
- . Sejam $u, v \in F_\alpha$. Vejamos que $u + v \in F_\alpha$.
Como $u, v \in F_\alpha$ tem-se $f(u) = \alpha u$ e $f(v) = \alpha v$. Dado que f é aplicação linear, tem-se

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = \alpha u + \alpha v = \alpha(u + v).$$

Logo, $u + v \in F_\alpha$.

- . Sejam $\gamma \in \mathbb{R}$ e $u \in F_\alpha$. Vejamos que $\gamma u \in F_\alpha$.
Como $u \in F_\alpha$ tem-se $f(u) = \alpha u$. Assim, como f é aplicação linear, tem-se

$$f(\gamma u) = \gamma f(u) = \gamma(\alpha u) = (\gamma\alpha)u = (\alpha\gamma)u = \alpha(\gamma u).$$

Logo, $\gamma u \in F_\alpha$.

Concluimos, portanto, que F_α é subespaço vectorial de E .

- (b) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \neq \beta$. Vejamos que $F_\alpha \cap F_\beta = \{0_E\}$.

Como F_α e F_β são subespaços vectoriais de E sabemos que $\{0_E\} \subseteq F_\alpha \cap F_\beta$. Consideremos um vector arbitrário $u \in F_\alpha \cap F_\beta$. Como $u \in F_\alpha$ e $u \in F_\beta$ verifica-se $f(u) = \alpha u$ e $f(u) = \beta u$, pelo que

$$\alpha u = \beta u,$$

isto é,

$$\alpha u - \beta u = (\alpha - \beta)u = 0_E.$$

Como $\alpha - \beta \neq 0$ (pois, por hipótese, $\alpha \neq \beta$) concluimos que $u = 0_E$. Logo $F_\alpha \cap F_\beta \subseteq \{0_E\}$ e, portanto,

$$F_\alpha \cap F_\beta = \{0_E\}.$$