Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 10 de Novembro de 2007

TESTE A

NOTAS

1 - O teste é constituído por 20 questões de escolha múltipla, distribuídas por quatro grupos (I a IV). Os grupos I e II têm 6 questões cada, o grupo III tem 5 questões e o grupo IV tem 3 questões.

2 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

3 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

4 - Para cada um dos grupos, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,0$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

5 - A classificação de cada grupo é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_G}\}$, onde $\mathrm{cl_G}$ designa a soma das classificações obtidas nas questões do grupo G.

6 - A classificação do teste é obtida pela soma das classificações dos grupos I a IV.

Grupo I

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}), B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A É possível efectuar $A + B$ e o resultado é $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

B É possível efectuar AB e o resultado é $AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -9 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

C É possível efectuar $AB^\top$ e o resultado é $AB^\top = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 6 \\ 7 & -5 & -4 \\ -2 & -8 & -4 \end{bmatrix}$.

D $A^\top B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $A^\top B = \begin{bmatrix} -11 & -11 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se uma matriz é simétrica então é quadrada.

B A soma de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica.

C Se uma matriz é quadrada, então ou é simétrica ou é hemi-simétrica.

D Se A é hemi-simétrica, então $A + A^\top$ é a matriz nula.

Continua no verso desta folha

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A A é uma matriz linha e B é uma matriz coluna.
- B C é uma matriz quadrada de ordem 2 e D é uma matriz do tipo 2×3.
- C $A^\top$ é uma matriz coluna e $D^\top C$ é uma matriz quadrada .
- D $B^\top$ é uma matriz linha e BA é uma matriz do tipo 4×5.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A AB é uma matriz do tipo 3×2 e $(AB)_{31} = 4$.
- B $B^\top A^\top$ é uma matriz do tipo 2×3 e $(B^\top A^\top)_{12} = 10$.
- C $C\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo C é uma matriz invertível.
- D BC é uma matriz do tipo 4×2 e $(BC)_{12} = -5$.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- B $BC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $(AB)C = A\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- C Para qualquer matriz $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se $CD = DC$.
- D Existem matrizes $E, F \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ para as quais se tem $EF = FE$.

6. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}$ e $B, C \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $A(B + C) = AB + AC$.
- B $(B + C)^2 \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$.
- C $(AC)^2 \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
- D Se $(\alpha - \beta)A = 0_{3\times 5}$, então $\alpha = \beta$ ou $A = 0_{3\times 5}$.

Continua na folha seguinte

Grupo II

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A B obteve-se da matriz A substituindo a linha 3 pela sua soma com o simétrico da linha 1.

B A matriz que se obtém de B substituindo a linha 3 pela sua soma com a linha 2 é C.

C C obteve-se da matriz B substituindo a linha 2 pela sua soma com a linha 3.

D Tem-se $A \xrightarrow{l_3-l_1} B \xrightarrow{l_3+l_2} C$, isto é, C é a matriz que se obtém de A efectuando em primeiro lugar a substituição da linha 3 pela sua soma com o simétrico da linha 1 e de seguida a substituição da linha 3 pela sua soma com a linha 2.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B $E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

C $E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $E_1^{-1} = E_1$.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz A está em forma de escada.

B A matriz B está em forma de escada reduzida.

C $\mathrm{r}(A) = 3$ e $\mathrm{r}(C) = 3$.

D $\mathrm{r}(B) = 2$ e $\mathrm{r}(C) \leqslant 3$.

4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz elementar, então $\mathrm{r}(E) = n$.

B Se $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), E \neq I_n$, é uma matriz elementar, então E não está na forma de escada reduzida.

C Se $A = E_1E_2E_3$, em que $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são matrizes elementares arbitrárias, então $A^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

D Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, então $\mathrm{r}(AB) = n$.

Continua no verso desta folha

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz A é invertível.

B $\mathrm{r}(A) = 3$.

C $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

D $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

6. De uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sabe-se que $A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} B_1 \xrightarrow{2l_3} B_2 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} I_n$. Além disso, tem-se $I_3 \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} E_1$, $I_3 \xrightarrow{2l_3} E_2$ e $I_3 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} E_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A^{-1} = E_3 E_2 E_1$.

B $A = E_1 E_2^{-1} E_3$.

C $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$.

D $E_3 E_2 E_1 A = E_2 E_3 E_1 A$.

Grupo III

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - z = 1 \\ 5x + y = 3. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz simples do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

B $(0, 0, 1)$ não é solução do sistema (S).

C $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

D $(1, -2, 1)$ não é solução do sistema (S).

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Considere o sistema $(S)\ AX = B$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz ampliada do sistema (S) é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$.

B Sendo $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, o sistema $(S')\ A'X = B'$ é equivalente a (S).

C $(-4, 1, 1)$ é solução do sistema (S') mas não é solução do sistema (S).

D $(2, 0, 1)$ não é solução de (S) nem de (S').

Continua na folha seguinte

3. Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O sistema $A_1X = B_1$ é impossível.

B O sistema $A_2X = B_1$ é possível indeterminado.

C O sistema $A_2X = B_2$ é possível indeterminado.

D Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, o sistema $AX = B_2$ é possível.

4. Sejam $A_1 \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ e X uma matriz coluna de incógnitas, de tipo adequado.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O sistema $A_1X = B$ ou é impossível ou é possível indeterminado.

B Se $\mathrm{r}(A_2) = 4$, então o sistema $A_2X = B$ tem uma única solução.

C $(0, 0, 0, 0)$ é solução do sistema $A_2X = 0_{4\times 1}$.

D O sistema $A_1X = B$ é sempre impossível.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O sistema $(S) \begin{cases} x + 3y + 5z + 2w = 1 \\ y - z = 2 \\ w = -1 \end{cases}$ corresponde ao sistema $AX = B$.

B O conjunto solução do sistema $AX = B$ é $\{(-8z - 3, z + 2, z, -1), z \in \mathbb{R}\}$.

C O conjunto solução do sistema $AX = B$ é $\{(-8z - 3, z + 2, 0, -1), z \in \mathbb{R}\}$.

D $(-3, 2, 0, -1)$ e $(5, 1, -1, -1)$ são soluções do sistema $AX = B$.

Grupo IV

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(S) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ (\alpha - 1)y = \beta \\ \beta z = \alpha - 1. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 0$, o sistema é possível determinado.

B Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$, o sistema é impossível.

C Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.

D Se $\alpha \neq 1$ e $\beta = 0$, o sistema é impossível.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Considere o sistema, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, $AX = B$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B) < n$, o sistema é possível indeterminado.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|B)$ e $m < n$, o sistema é possível indeterminado.

$\boxed{\text{C}}$ Se $m < n$, $\mathrm{r}(A) = m$ e $\mathrm{r}(A|B) = n$, então $n = m + 1$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $m = n$ e $\mathrm{r}(A) < n$, o sistema é sempre impossível.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A é invertível e a solução do sistema $AX = B$ é dada por $X = A^{-1}B$.

$\boxed{\text{B}}$ A é invertível e a única solução do sistema homogéneo $AX = 0$ é $X = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ O sistema $AX = B$ é possível indeterminado.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}(A|B) =$nº de incógnitas, donde o sistema é possível determinado.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 10 de Novembro de 2007

TESTE A

FOLHA DE RESPOSTAS

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de aluno: | | | | | | **Curso:**____________________

Grupo I

	A	**B**	**C**	**D**
1.		X		
2.			X	
3.			X	
4.				X
5.			X	
6.		X		

Grupo II

	A	**B**	**C**	**D**
1.			X	
2.			X	
3.			X	
4.			X	
5.				X
6.				X

Grupo III

	A	**B**	**C**	**D**
1.				X
2.			X	
3.		X		
4.				X
5.			X	

Grupo IV

	A	**B**	**C**	**D**
1.			X	
2.				X
3.			X	