Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE A

NOTAS

1 - O teste é constituído por 16 questões de escolha múltipla.

2 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

3 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

4 - A cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,0$ valores para as questões de 1 a 8 e $+1,5$ para as questões de 9 a 16;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores para as questões de 1 a 8 e $-0,5$ para as questões de 9 a 16.**

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ e C é uma matriz quadrada tal que $(AB)^\top C$ está definida então C é do tipo 4×4.

B Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$, C é uma matriz quadrada e D é tal que $C(AB)^\top + D$ está definida então D é do tipo 4×4.

C Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ então o elemento $(AB^\top)_{32}$ é igual a $\sum_{k=1}^{3} A_{3k}B_{2k}$.

D Se A é tal que $A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ então $A^\top$ é do tipo 2×3.

2. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária e sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A + A^\top$ é simétrica e $A - A^\top$ é hemi-simétrica.

B $AA^\top$ é simétrica.

C B é simétrica.

D C é hemi-simétrica.

Continua no verso desta folha

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -16 & 7 \\ -4 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AB = 8I_n$.

B $(3A+B)^\top = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 12 \\ -13 & 17 & 10 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$.

C A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{8}B$.

D $AB \neq BA$.

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A não está em forma de escada mas B está.

B A forma de escada reduzida de A e de B é C.

C As matrizes A, B, C e D têm a mesma característica.

D D está em forma de escada mas não está em forma de escada reduzida.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é invertível e a sua inversa é $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

B A e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ têm a mesma forma de escada reduzida.

C Qualquer matriz invertível de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e a sua inversa têm a mesma forma de escada reduzida.

D Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz αA é invertível.

6. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes arbitrárias.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

B $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$.

C $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$.

D $(AB)^2 = A^2B^2$.

Continua na folha seguinte

7. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A é invertível e $AB = 0$ então $B = 0$.

B Se A é invertível e $ABA^\top = 0$ então $B = 0$.

C Se A e B são invertíveis então $AB^\top$ é invertível.

D Pode ter-se $\alpha B = 0$ com $\alpha \neq 0$ e $B \neq 0$.

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tais que A e B comutam, isto é, $AB = BA$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A^\top$ e $B^\top$ comutam.

B Se A e B são invertíveis então A^{-1} e B^{-1} comutam.

C A^2 e B^3 não comutam.

D A^* e B^* comutam.

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Existe uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[(linhas)]{} D$.

B Existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, não nula, tal que $AB = 0_{n\times n}$.

C $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

D Se $AC_1 = AC_2$ então $C_1 = C_2$.

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, com $m \geq 3$. Sejam T_1, T_2, e T_3 transformações elementares sobre linhas tais que $A \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_1]{} A_1 \xrightarrow[T_1]{} A$, $A \xrightarrow[4l_1]{} A_2 \xrightarrow[T_2]{} A$ e $A \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3 \xrightarrow[T_3]{} A$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A transformação elementar T_1 é $l_3 \leftrightarrow l_1$.

B A transformação elementar T_2 é $\frac{1}{4}l_1$.

C A transformação elementar T_3 é $l_3 + (-\frac{1}{2})l_1$.

D Multiplicar uma linha por zero não é uma transformação elementar sobre linhas.

Continua na folha seguinte

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} A_1 \xrightarrow[3l_2]{} A_2 \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A_1 = E_1 A$, com $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

B $A_2 = E_2 A_1$, com $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A_3 = E_3 A_2$, com $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $A_3 = E_1 E_2 E_3 A$.

12. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares e considere os seguintes casos:

	Tipo da matriz A	$r(A)$	$r([A \mid B])$
Caso 1.	3×3	2	3
Caso 2.	5×3	3	3
Caso 3.	5×7	3	3
Caso 4.	3×5	3	3

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A No Caso 1. o sistema é impossível.

B No Caso 2. o sistema é possível determinado.

C No Caso 3. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

D No Caso 4. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

13. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Os sistemas $AX = B_1$ e $A'X = B_1$ são ambos impossíveis.

B O sistema $AX = 0$ só admite a solução $(0,0,0,0)$.

C O sistema $AX = B_2$ é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2.

D $(-1,1,0,0)$ é solução do sistema $AX = B_2$.

14. Para cada $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x e y:

$$(S_b) \quad \begin{cases} x + (2-b)y = 0 \\ (b+2)x + 3y = b+1. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $b = 1$ ou $b = -1$ o sistema é possível indeterminado.

B Se $b = 0$ então $(2,-1)$ é a única solução do sistema.

C Se $b \neq 1$ e $b \neq -1$ o sistema é possível determinado.

D Se $b = -1$ o conjunto de soluções é $\{(-3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Continua no verso desta folha

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Para qualquer matriz da forma $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & -d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tem-se $BA = I_2$.

B A não é invertível.

C Existe pelo menos uma matriz $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_3$.

D Se $F \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e existem matrizes $G_1 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $G_2 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tais que $FG_1 = I_m$ e $G_2F = I_n$ então $n = m$ e $G_1 = G_2$.

16. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Considere $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A é idempotente então $I_n - A$ é idempotente.

B Se A é idempotente então $A(I_n - A) = 0$.

C As únicas matrizes idempotentes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são I_n e $0_{n\times n}$.

D Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $B^2(I_n - B) = B(I_n - B)^2 = 0$ então B é idempotente.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE A

FOLHA DE RESPOSTAS

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de aluno: | | | | | | **Curso:**____________________

	A	**B**	**C**	**D**
1.		X		
2.				X
3.				X
4.				X
5.				X
6.				X
7.				X
8.			X	

	A	**B**	**C**	**D**
9.		X		
10.			X	
11.				X
12.			X	
13.		X		
14.	X			
15.			X	
16.			X	

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE B

NOTAS

1 - O teste é constituído por 16 questões de escolha múltipla.

2 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

3 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

4 - A cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,0$ valores para as questões de 1 a 8 e $+1,5$ para as questões de 9 a 16;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores para as questões de 1 a 8 e $-0,5$ para as questões de 9 a 16.**

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -16 & 7 \\ -4 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AB \neq BA$.

B $(3A+B)^{\top} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 12 \\ -13 & 17 & 10 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$.

C $AB = 8I_n$.

D A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{8}B$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Qualquer matriz invertível de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e a sua inversa têm a mesma forma de escada reduzida.

B A e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ têm a mesma forma de escada reduzida.

C Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz αA é invertível.

D A é invertível e a sua inversa é $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

3. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes arbitrárias.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$.

B $(AB)^2 = A^2B^2$.

C $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

D $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$.

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária e sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A B é simétrica.

B $AA^\top$ é simétrica.

C C é hemi-simétrica.

D $A + A^\top$ é simétrica e $A - A^\top$ é hemi-simétrica.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ e C é uma matriz quadrada tal que $(AB)^\top C$ está definida então C é do tipo 4×4.

B Se A é tal que $A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ então $A^\top$ é do tipo 2×3.

C Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$, C é uma matriz quadrada e D é tal que $C(AB)^\top + D$ está definida então D é do tipo 4×4.

D Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ então o elemento $(AB^\top)_{32}$ é igual a $\sum_{k=1}^{3} A_{3k}B_{2k}$.

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A D está em forma de escada mas não está em forma de escada reduzida.

B As matrizes A, B, C e D têm a mesma característica.

C A forma de escada reduzida de A e de B é C.

D A não está em forma de escada mas B está.

Continua na folha seguinte

7. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tais que A e B comutam, isto é, $AB = BA$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A^2 e B^3 não comutam.

B Se A e B são invertíveis então A^{-1} e B^{-1} comutam.

C A^* e B^* comutam.

D $A^\top$ e $B^\top$ comutam.

8. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A é invertível e $AB = 0$ então $B = 0$.

B Pode ter-se $\alpha B = 0$ com $\alpha \neq 0$ e $B \neq 0$.

C Se A é invertível e $ABA^\top = 0$ então $B = 0$.

D Se A e B são invertíveis então $AB^\top$ é invertível.

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} A_1 \xrightarrow[3l_2]{} A_2 \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A_3 = E_1E_2E_3A$.

B $A_2 = E_2A_1$, com $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A_1 = E_1A$, com $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D $A_3 = E_3A_2$, com $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O sistema $AX = B_2$ é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2.

B O sistema $AX = 0$ só admite a solução $(0, 0, 0, 0)$.

C $(-1, 1, 0, 0)$ é solução do sistema $AX = B_2$.

D Os sistemas $AX = B_1$ e $A'X = B_1$ são ambos impossíveis.

Continua no verso desta folha

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, com $m \geq 3$. Sejam T_1, T_2, e T_3 transformações elementares sobre linhas tais que $A \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_1]{} A_1 \xrightarrow[T_1]{} A$, $A \xrightarrow[4l_1]{} A_2 \xrightarrow[T_2]{} A$ e $A \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3 \xrightarrow[T_3]{} A$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A transformação elementar T_3 é $l_3 + (-\frac{1}{2})l_1$.

$\boxed{\text{B}}$ A transformação elementar T_2 é $\frac{1}{4}l_1$.

$\boxed{\text{C}}$ Multiplicar uma linha por zero não é uma transformação elementar sobre linhas.

$\boxed{\text{D}}$ A transformação elementar T_1 é $l_3 \leftrightarrow l_1$.

12. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Existe uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[(linhas)]{} D$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $AC_1 = AC_2$ então $C_1 = C_2$.

$\boxed{\text{C}}$ Existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, não nula, tal que $AB = 0_{n\times n}$.

$\boxed{\text{D}}$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

13. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares e considere os seguintes casos:

	Tipo da matriz A	$r(A)$	$r([A \mid B])$
Caso 1.	3×3	2	3
Caso 2.	5×3	3	3
Caso 3.	5×7	3	3
Caso 4.	3×5	3	3

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ No Caso 4. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{B}}$ No Caso 3. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{C}}$ No Caso 2. o sistema é possível determinado.

$\boxed{\text{D}}$ No Caso 1. o sistema é impossível.

14. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Considere $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $B^2(I_n - B) = B(I_n - B)^2 = 0$ então B é idempotente.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é idempotente então $A(I_n - A) = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é idempotente então $I_n - A$ é idempotente.

$\boxed{\text{D}}$ As únicas matrizes idempotentes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são I_n e $0_{n\times n}$.

Continua na folha seguinte

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Existe pelo menos uma matriz $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_3$.

B A não é invertível.

C Se $F \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e existem matrizes $G_1 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $G_2 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tais que $FG_1 = I_m$ e $G_2F = I_n$ então $n = m$ e $G_1 = G_2$.

D Para qualquer matriz da forma $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & -d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tem-se $BA = I_2$.

16. Para cada $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x e y:

$$(S_b)\ \begin{cases} x + (2-b)y = 0 \\ (b+2)x + 3y = b+1. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $b = 1$ ou $b = -1$ o sistema é possível indeterminado.

B Se $b = -1$ o conjunto de soluções é $\{(-3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

C Se $b = 0$ então $(2, -1)$ é a única solução do sistema.

D Se $b \neq 1$ e $b \neq -1$ o sistema é possível determinado.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE B

FOLHA DE RESPOSTAS

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de aluno: | | | | | | **Curso:**____________________

	A	B	C	D
1.	X			
2.			X	
3.		X		
4.			X	
5.			X	
6.	X			
7.	X			
8.		X		

	A	B	C	D
9.	X			
10.		X		
11.	X			
12.			X	
13.		X		
14.				X
15.	X			
16.	X			

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE C

NOTAS

1 - O teste é constituído por 16 questões de escolha múltipla.

2 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

3 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

4 - A cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,0$ valores para as questões de 1 a 8 e $+1,5$ para as questões de 9 a 16;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores para as questões de 1 a 8 e $-0,5$ para as questões de 9 a 16.**

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] A forma de escada reduzida de A e de B é C.
- [B] As matrizes A, B, C e D têm a mesma característica.
- [C] D está em forma de escada mas não está em forma de escada reduzida.
- [D] A não está em forma de escada mas B está.

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes arbitrárias.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$.
- [B] $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
- [C] $(AB)^2 = A^2B^2$.
- [D] $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$.

Continua no verso desta folha

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$, C é uma matriz quadrada e D é tal que $C(AB)^\top + D$ está definida então D é do tipo 4×4.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é tal que $A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ então $A^\top$ é do tipo 2×3.

$\boxed{\text{C}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ e C é uma matriz quadrada tal que $(AB)^\top C$ está definida então C é do tipo 4×4.

$\boxed{\text{D}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ então o elemento $(AB^\top)_{32}$ é igual a $\sum_{k=1}^{3} A_{3k}B_{2k}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Qualquer matriz invertível de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e a sua inversa têm a mesma forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{B}}$ A é invertível e a sua inversa é $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ A e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ têm a mesma forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{D}}$ Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz αA é invertível.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -16 & 7 \\ -4 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{8}B$.

$\boxed{\text{B}}$ $(3A+B)^\top = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 12 \\ -13 & 17 & 10 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $AB \neq BA$.

$\boxed{\text{D}}$ $AB = 8I_n$.

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária e sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ B é simétrica.

$\boxed{\text{B}}$ $A + A^\top$ é simétrica e $A - A^\top$ é hemi-simétrica.

$\boxed{\text{C}}$ C é hemi-simétrica.

$\boxed{\text{D}}$ $AA^\top$ é simétrica.

Continua na folha seguinte

7. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A é invertível e $ABA^\top = 0$ então $B = 0$.

B Pode ter-se $\alpha B = 0$ com $\alpha \neq 0$ e $B \neq 0$.

C Se A é invertível e $AB = 0$ então $B = 0$.

D Se A e B são invertíveis então $AB^\top$ é invertível.

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tais que A e B comutam, isto é, $AB = BA$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A^2 e B^3 não comutam.

B $A^\top$ e $B^\top$ comutam.

C A^* e B^* comutam.

D Se A e B são invertíveis então A^{-1} e B^{-1} comutam.

9. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares e considere os seguintes casos:

	Tipo da matriz A	$r(A)$	$r([A \mid B])$
Caso 1.	3×3	2	3
Caso 2.	5×3	3	3
Caso 3.	5×7	3	3
Caso 4.	3×5	3	3

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A No Caso 2. o sistema é possível determinado.

B No Caso 3. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

C No Caso 4. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

D No Caso 1. o sistema é impossível.

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, não nula, tal que $AB = 0_{n\times n}$.

B Se $AC_1 = AC_2$ então $C_1 = C_2$.

C Existe uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[(linhas)]{} D$.

D $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Continua na folha seguinte

11. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A O sistema $AX = B_2$ é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2.

B Os sistemas $AX = B_1$ e $A'X = B_1$ são ambos impossíveis.

C O sistema $AX = 0$ só admite a solução $(0,0,0,0)$.

D $(-1,1,0,0)$ é solução do sistema $AX = B_2$.

12. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} A_1 \xrightarrow[3l_2]{} A_2 \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A_3 = E_3A_2$, com $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B $A_2 = E_2A_1$, com $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A_3 = E_1E_2E_3A$.

D $A_1 = E_1A$, com $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, com $m \geq 3$. Sejam T_1, T_2, e T_3 transformações elementares sobre linhas tais que $A \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_1]{} A_1 \xrightarrow[T_1]{} A$, $A \xrightarrow[4l_1]{} A_2 \xrightarrow[T_2]{} A$ e $A \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3 \xrightarrow[T_3]{} A$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A transformação elementar T_3 é $l_3 + (-\frac{1}{2})l_1$.

B A transformação elementar T_1 é $l_3 \leftrightarrow l_1$.

C Multiplicar uma linha por zero não é uma transformação elementar sobre linhas.

D A transformação elementar T_2 é $\frac{1}{4}l_1$.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Existe pelo menos uma matriz $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_3$.

B Para qualquer matriz da forma $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & -d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tem-se $BA = I_2$.

C Se $F \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e existem matrizes $G_1 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $G_2 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tais que $FG_1 = I_m$ e $G_2F = I_n$ então $n = m$ e $G_1 = G_2$.

D A não é invertível.

Continua no verso desta folha

15. Para cada $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x e y:

$$(S_b) \left\{ \begin{array}{l} x + (2-b)y = 0 \\ (b+2)x + 3y = b+1. \end{array} \right.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $b = 0$ então $(2, -1)$ é a única solução do sistema.

B Se $b = -1$ o conjunto de soluções é $\{(-3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

C Se $b = 1$ ou $b = -1$ o sistema é possível indeterminado.

D Se $b \neq 1$ e $b \neq -1$ o sistema é possível determinado.

16. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Considere $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A As únicas matrizes idempotentes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são I_n e $0_{n \times n}$.

B Se A é idempotente então $A(I_n - A) = 0$.

C Se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é tal que $B^2(I_n - B) = B(I_n - B)^2 = 0$ então B é idempotente.

D Se A é idempotente então $I_n - A$ é idempotente.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE C

FOLHA DE RESPOSTAS

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de aluno: | | | | | | **Curso:**____________________

	A	B	C	D
1.			X	
2.			X	
3.	X			
4.				X
5.			X	
6.			X	
7.		X		
8.	X			

	A	B	C	D
9.		X		
10.	X			
11.			X	
12.			X	
13.	X			
14.	X			
15.			X	
16.	X			

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE D

NOTAS

1 - O teste é constituído por 16 questões de escolha múltipla.

2 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

3 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

4 - A cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,0$ valores para as questões de 1 a 8 e $+1,5$ para as questões de 9 a 16;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores para as questões de 1 a 8 e $-0,5$ para as questões de 9 a 16.**

1. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária e sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A C é hemi-simétrica.

B $A + A^\top$ é simétrica e $A - A^\top$ é hemi-simétrica.

C B é simétrica.

D $AA^\top$ é simétrica.

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$,

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A forma de escada reduzida de A e de B é C.

B A não está em forma de escada mas B está.

C D está em forma de escada mas não está em forma de escada reduzida.

D As matrizes A, B, C e D têm a mesma característica.

Continua no verso desta folha

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times3}(\mathbb{K})$, C é uma matriz quadrada e D é tal que $C(AB)^\top + D$ está definida então D é do tipo 4×4.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é tal que $A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ então $A^\top$ é do tipo 2×3.

$\boxed{\text{C}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times3}(\mathbb{K})$ então o elemento $(AB^\top)_{32}$ é igual a $\sum_{k=1}^{3} A_{3k}B_{2k}$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{4\times5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times3}(\mathbb{K})$ e C é uma matriz quadrada tal que $(AB)^\top C$ está definida então C é do tipo 4×4.

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes arbitrárias.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(AB)^2 = A^2B^2$.

$\boxed{\text{B}}$ $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

$\boxed{\text{C}}$ $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$.

$\boxed{\text{D}}$ $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A é invertível e a sua inversa é $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ a matriz αA é invertível.

$\boxed{\text{C}}$ Qualquer matriz invertível de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e a sua inversa têm a mesma forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{D}}$ A e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ têm a mesma forma de escada reduzida.

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -16 & 7 \\ -4 & 8 & -2 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{8}B$.

$\boxed{\text{B}}$ $AB = 8I_n$.

$\boxed{\text{C}}$ $AB \neq BA$.

$\boxed{\text{D}}$ $(3A+B)^\top = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 12 \\ -13 & 17 & 10 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$.

Continua na folha seguinte

7. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tais que A e B comutam, isto é, $AB = BA$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A^* e B^* comutam.

B $A^\top$ e $B^\top$ comutam.

C A^2 e B^3 não comutam.

D Se A e B são invertíveis então A^{-1} e B^{-1} comutam.

8. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A é invertível e $ABA^\top = 0$ então $B = 0$.

B Pode ter-se $\alpha B = 0$ com $\alpha \neq 0$ e $B \neq 0$.

C Se A e B são invertíveis então $AB^\top$ é invertível.

D Se A é invertível e $AB = 0$ então $B = 0$.

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz arbitrária, com $m \geq 3$. Sejam T_1, T_2, e T_3 transformações elementares sobre linhas tais que $A \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_1]{} A_1 \xrightarrow[T_1]{} A$, $A \xrightarrow[4l_1]{} A_2 \xrightarrow[T_2]{} A$ e $A \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3 \xrightarrow[T_3]{} A$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Multiplicar uma linha por zero não é uma transformação elementar sobre linhas.

B A transformação elementar T_1 é $l_3 \leftrightarrow l_1$.

C A transformação elementar T_3 é $l_3 + (-\frac{1}{2})l_1$.

D A transformação elementar T_2 é $\frac{1}{4}l_1$.

10. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares e considere os seguintes casos:

	Tipo da matriz A	$r(A)$	$r([A \mid B])$
Caso 1.	3×3	2	3
Caso 2.	5×3	3	3
Caso 3.	5×7	3	3
Caso 4.	3×5	3	3

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A No Caso 2. o sistema é possível determinado.

B No Caso 1. o sistema é impossível.

C No Caso 4. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

D No Caso 3. o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

Continua no verso desta folha

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, não nula, tal que $AB = 0_{n\times n}$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $AC_1 = AC_2$ então $C_1 = C_2$.

$\boxed{\text{C}}$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

$\boxed{\text{D}}$ Existe uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[(linhas)]{} D$.

12. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Os sistemas $AX = B_1$ e $A'X = B_1$ são ambos impossíveis.

$\boxed{\text{B}}$ $(-1, 1, 0, 0)$ é solução do sistema $AX = B_2$.

$\boxed{\text{C}}$ O sistema $AX = B_2$ é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{D}}$ O sistema $AX = 0$ só admite a solução $(0, 0, 0, 0)$.

13. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} A_1 \xrightarrow[3l_2]{} A_2 \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} A_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $A_3 = E_3A_2$, com $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $A_1 = E_1A$, com $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $A_3 = E_1E_2E_3A$.

$\boxed{\text{D}}$ $A_2 = E_2A_1$, com $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $F \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e existem matrizes $G_1 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $G_2 \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tais que $FG_1 = I_m$ e $G_2F = I_n$ então $n = m$ e $G_1 = G_2$.

$\boxed{\text{B}}$ Para qualquer matriz da forma $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & -d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tem-se $BA = I_2$.

$\boxed{\text{C}}$ Existe pelo menos uma matriz $C \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_3$.

$\boxed{\text{D}}$ A não é invertível.

Continua na folha seguinte

15. Para cada $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x e y:

$$(S_b) \quad \begin{cases} x + (2-b)y = 0 \\ (b+2)x + 3y = b + 1. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $b = 0$ então $(2, -1)$ é a única solução do sistema.

B Se $b = -1$ o conjunto de soluções é $\{(-3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

C Se $b \neq 1$ e $b \neq -1$ o sistema é possível determinado.

D Se $b = 1$ ou $b = -1$ o sistema é possível indeterminado.

16. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Considere $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A As únicas matrizes idempotentes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são I_n e $0_{n\times n}$.

B Se A é idempotente então $I_n - A$ é idempotente.

C Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $B^2(I_n - B) = B(I_n - B)^2 = 0$ então B é idempotente.

D Se A é idempotente então $A(I_n - A) = 0$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Departamento de Matemática FCT–UNL

Primeiro Teste – 16 de Novembro de 2007

TESTE D

FOLHA DE RESPOSTAS

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de aluno: | | | | | | **Curso:**____________________

	A	**B**	**C**	**D**
1.	X			
2.			X	
3.	X			
4.	X			
5.		X		
6.			X	
7.			X	
8.		X		

	A	**B**	**C**	**D**
9.			X	
10.				X
11.	X			
12.				X
13.			X	
14.			X	
15.				X
16.	X			