FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Primeiro Teste – 14 de Novembro de 2007

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.	X			
2.			X	
3.				X
4.		X		
5.	X			
6.			X	
7.				X
8.		X		
9.				X
10.		X		
11.				X
12.			X	
13.		X		
14.		X		
15.	X			
16.			X	
17.			X	
18.		X		
19.			X	
20.		X		

Atenção

Esta prova consiste em 20 grupos de escolha múltipla. Em cada um dos grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,0 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,33 valores.**
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**
- **Enunciado: O enunciado da prova é composto por 3 folhas, frente e verso, que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova deve entregar o enunciado completo.**

$\times 1,0-$ $\qquad \times 0,33 =$ $\qquad$ valores (Classificação)

O enunciado da prova começa no verso desta folha

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é invertível.

B B tem característica 3.

C C tem característica 1.

D C não é invertível.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha+3 & \beta \\ 1 & 2 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq 2$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 3.

B Se $\alpha = -1$ e $\beta = 2$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 1.

C Se $\alpha \neq -1$ e $\beta = 2$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 1.

D Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 2$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 2.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AB \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e a entrada $(4,4)$ de AB é igual a 3.

B $AB \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e a entrada $(4,3)$ de AB é igual a 3.

C $BA \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ e a entrada $(2,2)$ de BA é igual a 0.

D $BA \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ e a entrada $(3,4)$ de BA é igual a 1.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é uma matriz elementar do tipo I.

B B é uma matriz elementar do tipo II.

C C é uma matriz elementar do tipo III.

D CD é uma matriz elementar do tipo II.

Continua na próxima folha

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $Q \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ então Q e AQ podem ter características diferentes.

B $A^\top$ é invertível e $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

C Se $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são tais que $AB = AC$ então $B = C$.

D A tem uma, e uma só, inversa.

6. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AA^\top$ e $A^\top A$ são matrizes simétricas.

B $BB^\top + A^\top A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e é uma matriz simétrica.

C Se $m \neq p$, a matriz AB pode ser simétrica.

D $5B^\top = (5B)^\top$.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A tem característica n.

B I_n é a forma de escada reduzida de A.

C A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

D Existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \neq 0$, tal que $AB = 0$.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A, B e C são matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

B $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D ABC é uma matriz invertível e $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Continua no verso desta folha

9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A está em forma de escada.

B B está em forma de escada reduzida.

C A e B têm ambas característica 3.

D C tem característica 4.

10. Considere as matrizes de entradas reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $A + C^\top = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B $CB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

C $BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

D $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

11. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A B é invertível.

B I_2 é a forma de escada reduzida de C.

C B e C são ambas matrizes simétricas.

D $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

12. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é triangular superior.

B B tem característica 1.

C $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

D $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

13. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $c = b$ então A é simétrica.

B Admita que $b = c = 0$. Nesta situação A tem característica 2 se, e só se, $a \neq 0$ ou $d \neq 0$.

C $\left(A^2\right)^\top = \left(A^\top\right)^2$.

D A entrada $(2, 1)$ de AB é igual a $c + d$.

14. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se a forma de escada reduzida de AB é I_n então AB tem característica n.

B Se A e B são ambas invertíveis então $A + B$ é sempre invertível.

C Se A é simétrica e hemi–simétrica então $A = 0$.

D Se A e B são ambas invertíveis então AB é invertível.

15. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = BA$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se A e B são ambas invertíveis então $A^{-1}B^{-1}$ pode ter característica inferior a n.

B $A^\top B^\top = B^\top A^\top$.

C Se A e B são ambas invertíveis então $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

D $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

16. Sejam $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{3\times 7}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A entrada $(2, 4)$ de $B^\top A^\top$ é igual à entrada $(4, 2)$ de AB.

B $AB \in \mathcal{M}_{5\times 7}(\mathbb{R})$.

C $ABB^\top A^\top$ não é uma matriz simétrica.

D $(AB)^\top \in \mathcal{M}_{7\times 5}(\mathbb{R})$.

Continua no verso desta folha

17. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Q é uma matriz diagonal.

[B] P é uma matriz simétrica.

[C] Q é uma matriz escalar.

[D] R é uma matriz triangular inferior.

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$

[B] C é invertível e C^{-1} é uma matriz elementar do tipo II.

[C] A é invertível e A^{-1} é uma matriz elementar do tipo I.

[D] ABC tem característica 3.

19. Considere as matrizes de entradas reais $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] A tem característica 2.

[B] $A + B$ é uma matriz escalar.

[C] DC é invertível.

[D] CD não é invertível.

20. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se simétrica quando $A^\top = A$.

[B] Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $A - A^\top \neq 0$ então $A - A^\top$ é simétrica.

[C] Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então $A + A^\top$ é simétrica.

[D] $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se hemi–simétrica quando $A^\top = -A$.

Fim