

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $\det A = k$ e $\det B = l$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det(AB^2) = kl^2$.
- ☐ B Se A é invertível então $k \neq 0$ e $\det((A^{-1})^3) = \frac{1}{k^3}$.
- ☐ C $\det(2A^T) = 2^n k$.
- ☐ D Pode ter-se A invertível, B não invertível e $k = l$.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}), \text{ com } acef \neq 0.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det A = -acef$.
- ☐ B $\hat{A}_{32} = 0$.
- ☐ C $\hat{A}_{24} = aef$.
- ☐ D Quaisquer que sejam $b \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}$ a matriz A é invertível.

3. Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $A \xrightarrow{l_i \leftrightarrow l_j} A' \xrightarrow{l_i + \beta l_j} A''$, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $\beta \in \mathbb{K}$, então $\det A'' = -\det A$.
- ☐ B Se A é triangular superior então $\det A = A_{11} \cdots A_{nn}$.
- ☐ C Se A tem duas linhas iguais então $\det A = 0$.
- ☐ D Se $\det A \neq 0$ e $A \xrightarrow{3l_1} B$ então $\det A = 3 \det B$.

4. Sejam u_1, u_2, u_3, u_4 elementos do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se u_2 é combinação linear de u_1, u_3 e u_4 então $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle u_1, u_3, u_4 \rangle$.
- ☐ B Se $u_4 = 3u_1$ então a sequência (u_1, u_3, u_4) é linearmente dependente.
- ☐ C $u_1 + 2u_3 \in \langle u_1, u_3, u_4 \rangle$.
- ☐ D Pode ter-se (u_1, u_3, u_4) linearmente independente e (u_1, u_3, u_4) não ser uma base de $\mathbb{R}^3$.

5. Sejam $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $H = \{(a, b, -b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A F não é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ B G é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- ☐ C H é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ e $\dim H \neq \dim G$.
- ☐ D $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -1 & 2 \\ 0 & 4-\alpha & 3 \\ 0 & 4 & -\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.0] (a) Mostre que $\det A_\alpha = (1-\alpha)(\alpha-6)(\alpha+2)$.
- [1.0] (b) Indique o conjunto dos valores de α para os quais A_α é invertível.
- [1.0] (c) Justifique que A_2 (isto é, A_α com $\alpha = 2$) é invertível e determine a sua inversa a partir da sua adjunta.

Mude de Folha

7. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$F = \langle (2, 1, -1, 1), (0, -1, 1, 0) \rangle$$

e seja

$$G = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b + c \wedge d = 0 \}.$$

- [1.0] (a) Mostre que G é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.
- [1.0] (b) Determine uma base de G .
- [1.0] (c) Indique geradores para $F + G$.
- [1.5] (d) Determine a dimensão de $F + G$ e de $F \cap G$.
- [1.0] (e) Justifique que $(5, 4, 1, 5) \notin G$, mas $(5, 4, 1, 5) \in \langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) \rangle$.

Mude de Folha

[2.5] 8. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A^2 = -I_n.$$

Mostre que n é par e que $\det A \in \{-1, 1\}$.

Fim