



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Respostas

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

1. seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A é invertível e $|A| = -72$.
- ☐ B A é invertível e $(A^{-1})_{23} = 1$.
- ☐ C A é invertível e $|A^{-1}| = -\frac{1}{72}$.
- ☐ D $\text{adj } A$ é invertível e $|\text{adj } A| = 72^4$.

2. Considere as matrizes $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tais que $|A| \neq 0$ e

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_1} A_2 \xrightarrow{4l_3} B.$$

Suponha que $B = [b_{ij}]$ está em forma de escada.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $|A_2| + |A| = 0$.
- ☐ B $|A_1| = |A_2|$.
- ☐ C $|B| + 4|A| = 0$.
- ☐ D $|A| = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}$.

Continua no verso desta folha

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $a \neq 0$ e $b \neq 6$, então $AX = B$ é um sistema de Cramer.
- ☐ B Se $a = 1$ e $b = 8$, então $|A| = 2$.
- ☐ C Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

- ☐ D Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

4. No espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, considere

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a = -d \wedge b = c\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, com $F \neq \mathbb{R}_3[x]$.
- ☐ B $F = \langle -x^3 + 1, x^2 + x \rangle$.
- ☐ C $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ é combinação linear dos vectores $-x^3 + 1$ e $x^2 + x$.
- ☐ D $F \cap \langle -x^3, x^2 + x, 1 \rangle \neq F$.
5. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $F_k = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = e + f \wedge c + d = k \right\}$. Considere ainda $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A F_1 não é subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.
- ☐ B F_0 é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in F_0$.
- ☐ C $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.
- ☐ D $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in F_0 + G$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

TESTE B

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

☐ B Se $a = 1$ e $b = 8$, então $|A| = 2$.

☐ C Se $a \neq 0$ e $b \neq 6$, então $AX = B$ é um sistema de Cramer.

☐ D Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

Continua no verso desta folha

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $F_k = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = e + f \wedge c + d = k \right\}$. Considere ainda $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

☐ B F_0 é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in F_0$.

☐ C $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in F_0 + G$.

☐ D F_1 não é subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

3. Considere as matrizes $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tais que $|A| \neq 0$ e

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_1} A_2 \xrightarrow{4l_3} B.$$

Suponha que $B = [b_{ij}]$ está em forma de escada.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $|B| + 4|A| = 0$.

☐ B $|A_1| = |A_2|$.

☐ C $|A| = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}$.

☐ D $|A_2| + |A| = 0$.

4. seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A A é invertível e $|A| = -72$.

☐ B $\text{adj } A$ é invertível e $|\text{adj } A| = 72^4$.

☐ C A é invertível e $(A^{-1})_{23} = 1$.

☐ D A é invertível e $|A^{-1}| = -\frac{1}{72}$.

5. No espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, considere

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a = -d \wedge b = c\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $F \cap \langle -x^3, x^2 + x, 1 \rangle \neq F$.

☐ B $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ é combinação linear dos vectores $-x^3 + 1$ e $x^2 + x$.

☐ C $F = \langle -x^3 + 1, x^2 + x \rangle$.

☐ D F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, com $F \neq \mathbb{R}_3[x]$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

TESTE C

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Respostas

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

-
-
1. No espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, considere

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a = -d \wedge b = c\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F = \langle -x^3 + 1, x^2 + x \rangle$.
- ☐ B $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ é combinação linear dos vectores $-x^3 + 1$ e $x^2 + x$.
- ☐ C $F \cap \langle -x^3, x^2 + x, 1 \rangle \neq F$.
- ☐ D F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, com $F \neq \mathbb{R}_3[x]$.

2. seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A é invertível e $(A^{-1})_{23} = 1$.
- ☐ B $\text{adj } A$ é invertível e $|\text{adj } A| = 72^4$.
- ☐ C A é invertível e $|A| = -72$.
- ☐ D A é invertível e $|A^{-1}| = -\frac{1}{72}$.

Continua no verso desta folha

3. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $F_k = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = e + f \wedge c + d = k \right\}$. Considere ainda $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

☐ B F_1 não é subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

☐ C F_0 é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in F_0$.

☐ D $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in F_0 + G$.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

☐ B Se $a = 1$ e $b = 8$, então $|A| = 2$.

☐ C Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

☐ D Se $a \neq 0$ e $b \neq 6$, então $AX = B$ é um sistema de Cramer.

5. Considere as matrizes $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tais que $|A| \neq 0$ e

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_1} A_2 \xrightarrow{4l_3} B.$$

Suponha que $B = [b_{ij}]$ está em forma de escada.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $|B| + 4|A| = 0$.

☐ B $|A_2| + |A| = 0$.

☐ C $|A| = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}$.

☐ D $|A_1| = |A_2|$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

TESTE D

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Respostas

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

- 1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.
- 2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.
- 3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:
 - Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
 - Se responder correctamente: +1,5 valores;
 - Se responder erradamente: -0,5 valores.
- 4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, cl_M\}$, onde cl_M designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

-
-
1. Considere as matrizes $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ tais que $|A| \neq 0$ e

$$A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + 2l_1} A_2 \xrightarrow{4l_3} B.$$

Suponha que $B = [b_{ij}]$ está em forma de escada.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $|A| = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}$.
- ☐ B $|A_2| + |A| = 0$.
- ☐ C $|B| + 4|A| = 0$.
- ☐ D $|A_1| = |A_2|$.

2. No espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, considere

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a = -d \wedge b = c\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F = \langle -x^3 + 1, x^2 + x \rangle$.
- ☐ B F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$, com $F \neq \mathbb{R}_3[x]$.
- ☐ C $F \cap \langle -x^3, x^2 + x, 1 \rangle \neq F$.
- ☐ D $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ é combinação linear dos vectores $-x^3 + 1$ e $x^2 + x$.

Continua no verso desta folha

3. seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A A é invertível e $(A^{-1})_{23} = 1$.

☐ B $\text{adj } A$ é invertível e $|\text{adj } A| = 72^4$.

☐ C A é invertível e $|A^{-1}| = -\frac{1}{72}$.

☐ D A é invertível e $|A| = -72$.

4. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $F_k = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = e + f \wedge c + d = k \right\}$. Considere ainda $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A F_1 não é subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

☐ B $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in F_0 + G$.

☐ C $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

☐ D F_0 é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in F_0$.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

☐ B Se $a \neq 0$ e $b \neq 6$, então $AX = B$ é um sistema de Cramer.

☐ C Para $a = 1$ e $b = 8$, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução do sistema $AX = B$, então

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{2}.$$

☐ D Se $a = 1$ e $b = 8$, então $|A| = 2$.



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[4.5] 6. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ -1 & a-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b-2 & 0 \\ 2 & 4 & 7b & a \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante de A e conclua que não depende do valor de b .
- (b) Usando a alínea anterior, determine para que valores de a e b a matriz é invertível.
- (c) Para $b = 0$ e $a = 2$, indique:
 - i. o elemento da posição $(4, 4)$ da matriz $\text{adj } A$;
 - ii. o elemento da posição $(3, 4)$ da matriz A^{-1} .

Mude de Folha

[2.0] 7. Considere o sistema de três equações lineares nas incógnitas x, y e z :

$$(S) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \\ -y - z = -1. \end{cases}$$

- (a) Verifique que o sistema (S) é um sistema de Cramer. Justifique.
- (b) Calcule, usando determinantes, as soluções do sistema (S) .

Mude de Folha

[3.5] 8. Considere o conjunto $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \wedge c = -b\}$.

- (a) Mostre que F é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Indique, justificando, um conjunto de geradores de F .
- (c) Justifique que $(5, 2, -2, 1) \in \langle (1, 0, 0, 0), (2, 2, -2, 1) \rangle$ mas $(5, 2, -2, 1) \notin F$.

Mude de Folha

[2.5] 9. Considere o conjunto $G = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : A + A^T = kI_n, k \in \mathbb{K}\}$.

- (a) Mostre que G é subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- (b) Seja $A \in G$, invertível, em que $A + A^T = I_n$. Mostre que $\det(I_n - A^{-1}) = (-1)^n$.

Fim



Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT-UNL

Segundo Teste – 5 de Dezembro de 2007

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	B	D	D	D	C
Versão B	A	A	C	C	A
Versão C	C	A	A	C	C
Versão D	A	C	A	C	C

6. (a) Tem-se

$$|A| \stackrel{\text{Lapl.}}{=} a(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & b-2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} a(a-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & b-2 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a-1)[(b-2) - b] = -2a(a-1) = -2a^2 + 2a,$$

qualquer que seja o valor de b .

(b) A é invertível $\iff |A| \neq 0 \iff -2a(a-1) \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \wedge b \in \mathbb{R}$.

(c) Para $b = 0$ e $a = 2$ temos $|A| = -2 \cdot 2 \cdot (2-1) = -4$.

$$\text{i. } (\text{adj } A)_{44} = \hat{A}_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{ii. } (A^{-1})_{34} = \left(\frac{1}{|A|} \text{adj } A \right)_{34} = \frac{1}{|A|} \hat{A}_{43} = -\frac{1}{4}(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. (a) (S) é um sistema de Cramer se a matriz simples associada a (S) é quadrada e invertível. Calculemos $\det A$:

$$|A|_{l_2 - 2l_1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0. \text{ Logo } A \text{ é invertível e,}$$

portanto, (S) é um sistema de Cramer.

(b) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução de (S) , então

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0,$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

Logo, a solução do sistema é $(0, 1, 1)$.

8. (a) Observemos que $F = \{(2b, b, -b, d) : b, d \in \mathbb{R}\}$. Tem-se:

1. $F \subseteq \mathbb{R}^4$, visto que $b, d \in \mathbb{R} \Rightarrow (2b, b, -b, d) \in \mathbb{R}^4$.

2. $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) = (2 \times 0, 0, -0, 0) \in F$.

3. Sejam $(2x, x, -x, y), (2z, z, -z, w) \in F$ (com $x, y, z, w \in \mathbb{R}$). Então

$$(2x, x, -x, y) + (2z, z, -z, w) = (2x+2z, x+z, -x-z, y+w) = (2(x+z), x+z, -(x+z), y+w) \in F.$$

Assim, $\forall (2x, x, -x, y), (2z, z, -z, w) \in F, (2x, x, -x, y) + (2z, z, -z, w) \in F$.

4. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(2x, x, -x, y) \in F$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Então $\alpha(2x, x, -x, y) = (\alpha 2x, \alpha x, \alpha(-x), \alpha y) = (2(\alpha x), \alpha x, -(\alpha x), \alpha y) \in F$. Assim, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (2x, x, -x, y) \in F, \alpha(2x, x, -x, y) \in F$.

As quatro condições verificadas permitem-nos concluir que F é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Tem-se

$$\begin{aligned} F &= \{(2b, b, -b, d) : b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2b, b, -b, 0) + (0, 0, 0, d) : b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(2, 1, -1, 0) + d(0, 0, 0, 1) : b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, uma sequência de geradores de F pode ser $((2, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

(c) $(5, 2, -2, 1) \in \langle (1, 0, 0, 0), (2, 2, -2, 1) \rangle$ se e só se existirem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(2, 2, -2, 1) = (5, 2, -2, 1).$$

Ora, tem-se $(5, 2, -2, 1) = 3(1, 0, 0, 0) + 1(2, 2, -2, 1)$, donde está provado o pretendido. Por outro lado, $(5, 2, -2, 1) \notin F$, visto que, sendo $a = 5, b = 2, c = -2, d = 1$, tem-se $5 \neq 2 \times 2$, o que contraria a condição $a = 2b$, uma das que caracterizam F .

9. (a) Tem-se

1. $G \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ (por definição de G).

2. $0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})} \in G$, visto que $0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})} + (0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})})^\top = 0_{\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})} = 0I_n$ e $0 \in \mathbb{K}$.

3. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tais que $A_1 + A_1^\top = k_1 I_n$ e $A_2 + A_2^\top = k_2 I_n$. Assim,

$$(A_1 + A_2) + (A_1 + A_2)^\top = A_1 + A_2 + A_1^\top + A_2^\top = (A_1 + A_1^\top) + (A_2 + A_2^\top) = k_1 I_n + k_2 I_n = (k_1 + k_2) I_n,$$

onde $k_1 + k_2 \in \mathbb{K}$. Então $A_1 + A_2 \in G$.

4. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in G$. Então existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $A + A^\top = k I_n$. Assim,

$$(\alpha A) + (\alpha A)^\top = \alpha A + \alpha A^\top = \alpha(A + A^\top) = \alpha(k I_n) = (\alpha k) I_n,$$

onde $\alpha k \in \mathbb{K}$. Então $\alpha A \in G$.

Finalmente, G é subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(b) Sendo A invertível, da igualdade $A + A^\top = I_n$ sai que

$$\begin{aligned} A + A^\top = A^{-1}A &\iff A - A^{-1}A = -A^\top \\ &\iff I_n A - A^{-1}A = -A^\top \\ &\iff (I_n - A^{-1})A = -A^\top. \end{aligned}$$

Aplicando determinantes obtemos

$$|(I_n - A^{-1})A| = |-A^\top| \implies |(I_n - A^{-1})||A| = (-1)^n |A^\top| \implies |(I_n - A^{-1})||A| = (-1)^n |A|.$$

Tendo em conta que $|A| \neq 0$, vem o pretendido: $|(I_n - A^{-1})| = (-1)^n$.