

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -x + \alpha y - z = \beta + 1 \\ x + y + \beta z = \alpha - 1 \\ x + y + 2z = \beta - 3 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ **A** Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.
- ☐ **B** Se $\beta \neq 2$ então o sistema é impossível.
- ☐ **C** Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.
- ☐ **D** Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-3 - z, 2 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

2. Considere a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} a & z & 0 & 0 & e \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & h & 2 & 1 & f \\ c & i & 1 & 1 & g \\ d & 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $|Q| = -xyz$.
- ☐ B Q é invertível se, e só se, $x \neq 0$ e $z \neq 0$.
- ☐ C $\hat{Q}_{55} = -xz$.
- ☐ D $\hat{Q}_{45} = 0$.

3. Sejam $P, Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A P é invertível se, e só se, $|P| \neq 0$.
- ☐ B PQ é invertível se, e só se, P e Q são ambas matrizes invertíveis.
- ☐ C Se $|P| = 2$ então P é invertível e $|P^{-1}| = |P|$.
- ☐ D $|PQ| = |P||Q| = |Q||P| = |QP|$.

4. Seja $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $Q \operatorname{adj} Q = |Q|I_n$.
- ☐ B Se Q é invertível então $Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \operatorname{adj} Q$.
- ☐ C Se $|Q| = 1$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \operatorname{adj} Q$.
- ☐ D $\sum_{k=1}^n Q_{1k} \hat{Q}_{2k} \neq 0$.

5. Sejam $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & i' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $|P| = 4$ então $|2P| = 2 \times 4$.
- ☐ B $24 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 6b & c \\ 4d & 24e & 4f \\ g & 6h & i \end{vmatrix}$.
- ☐ C $\begin{vmatrix} a & d & g \\ c+c' & f+f' & i+i' \\ b & e & h \end{vmatrix} = -(|P| + |Q|)$.
- ☐ D $\begin{vmatrix} a & b & c+c' \\ d & e & f+f' \\ g & h & i+i' \end{vmatrix} = |P| + |Q|$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Calcule $|A|$ e justifique que A é invertível.

[2.5] (b) Determine matrizes elementares $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tais que

$$A^{-1} = E_2 E_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[2.0] (c) Determine A^{-1} utilizando a matriz $\text{adj } A$.

Mude de Folha

[3.0] 7. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$(S_{\alpha, \beta}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \beta + 1 \\ \alpha - 1 \\ \beta - 3 \end{bmatrix}.$$

Averigüe, justificando, se existem valores para α e β tais que $(S_{\alpha, \beta})$ tem uma, e uma só, solução.

Mude de Folha

[2.0] 8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. A matriz B foi obtida a partir da matriz A substituindo a linha i pela sua soma com a linha j multiplicada pelo número real β , $i \neq j$. Em esquema, temos

$$A \xrightarrow{l_i + \beta l_j} B.$$

Prove que $|A| = |B|$.

Fim

1. A

2. B

3. C

4. D

5. A

6. (a) Aplicando o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante, por exemplo, à linha 3 de A , tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1 \times 5 - 4 \times 1) = -1.$$

Como $|A| = -1 \neq 0$ concluímos que A é invertível.

(Alternativamente, podíamos obter $|A|$ calculando o determinante de uma matriz A' , obtida a partir de A , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A|$ com $|A'|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A' seja triangular. Por exemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{l_2 + (-1)l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{l_2 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \times 1 \times 1) = -1.)$$

(b) Como sabemos, a forma de escada reduzida de uma matriz invertível é a identidade. Equivalentemente, toda a matriz invertível pode ser escrita como produto de matrizes elementares. Em particular, a matriz invertível A^{-1} poderá ser escrita como o produto

$$E_2 E_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de 3 matrizes elementares (note que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar) se, e só se, for possível

obter A^{-1} a partir de I_3 (a forma de escada reduzida de A^{-1}), efectuando apenas 3 transformações elementares.

Vamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow{(\text{linhas})} [I_3 \mid A^{-1}]$, efectuando apenas 3 transformações elementares. Notemos que, simultaneamente, vamos determinar A^{-1} a partir de I_3 efectuando apenas 3 transformações elementares, a primeira delas, $l_2 + (-1)l_1$, é a transformação elementar

associada à matriz elementar $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + (-4)l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Atendendo ao efeito da multiplicação de uma matriz elementar, à esquerda, por uma matriz do tipo adequado, temos que

$$A^{-1} = E_2 E_1 E_0,$$

sendo E_0 , E_1 e E_2 as matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ associadas, respectivamente, às transformações elementares $l_2 + (-1)l_1$, $l_2 \leftrightarrow l_3$ e $l_1 + (-4)l_3$, isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Alternativamente, se fizermos $[A \mid I_3] \xrightarrow{(linhas)} [I_3 \mid A^{-1}]$ efectuando as transformações elementares

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{l_1 + (-4)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}] \end{aligned}$$

então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Como A é invertível, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. Sabemos que um sistema de equações lineares $AX = B$ tem uma, e uma só, solução (isto é, é possível e determinado) se, e só se, as matrizes A e $[A|B]$ têm ambas característica igual ao número de incógnitas do sistema.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ consideremos o sistema

$$(S_{\alpha, \beta}) \quad AX = B.$$

Efectuando na matriz ampliada do sistema, a matriz $[A|B]$, transformações elementares sobre linhas, vamos obter uma matriz $[A'|B']$ a partir da qual poderemos determinar se existem valores para α e β tais que A e $[A|B]$ têm ambas característica igual a 3 (=número de incógnitas do sistema).

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 & \beta + 1 \\ 1 & 1 & \beta & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & 2 & \beta - 3 \end{array} \right] \xrightarrow[l_4 + (-1)l_1]{l_2 + l_1, l_3 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha + 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \beta - 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 2 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Analisando a matriz $[A'|B']$ concluímos que

$$r(A) = 3 \text{ (=número de incógnitas do sistema) se, e só se, } \beta - 2 \neq 0 \text{ e } \alpha + 1 \neq 0.$$

Como para $\beta - 2 \neq 0$ e $\alpha + 1 \neq 0$ resulta que

$$r[A|B] = 4$$

e, portanto,

$$r(A) = 3 < r[A|B] = 4,$$

concluímos que não existem valores para α e β tais que $(S_{\alpha,\beta})$ seja possível determinado.

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, tais que $A \xrightarrow{l_i + \beta l_j} B$, com $i \neq j$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $i < j$. Tem-se

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} + \beta A_{j1} & \cdots & A_{in} + \beta A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta A_{j1} & \cdots & \beta A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + \beta \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = |A| + \beta \times 0 = |A|, \end{aligned}$$

como pretendíamos provar.

(Alternativamente, podíamos aplicar o Teorema de Laplace à linha i de B , obtendo

$$\begin{aligned} |B| &\stackrel{\text{Lapl.}}{=}_{l_i} B_{i1} \widehat{B}_{i1} + \cdots + B_{in} \widehat{B}_{in} = (A_{i1} + \beta A_{j1}) \widehat{B}_{i1} + \cdots + (A_{in} + \beta A_{jn}) \widehat{B}_{in} \\ &= (A_{i1} \widehat{B}_{i1} + \cdots + A_{in} \widehat{B}_{in}) + (\beta A_{j1} \widehat{B}_{i1} + \cdots + \beta A_{jn} \widehat{B}_{in}) \\ &= (A_{i1} \widehat{B}_{i1} + \cdots + A_{in} \widehat{B}_{in}) + \beta (A_{j1} \widehat{B}_{i1} + \cdots + A_{jn} \widehat{B}_{in}) \\ &= (A_{i1} \widehat{A}_{i1} + \cdots + A_{in} \widehat{A}_{in}) + \beta (A_{j1} \widehat{A}_{i1} + \cdots + A_{jn} \widehat{A}_{in}) \\ &\stackrel{\text{Lapl.}}{=}_{l_i} |A| + \beta \times 0 = |A|. \end{aligned}$$