FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo:____

____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{A}$ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (2a + b, c + 1)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, não é uma aplicação linear.

$\boxed{B}$ Se $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear então $g\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, 0, 0)$.

$\boxed{C}$ Se $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação linear tal que $h(1, 0) = (1, 1)$ e $h(0, 1) = (2, -1)$ então $h(a, b) = (a + 2b, b - a)$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{D}$ Se E e E' são espaços vectoriais de dimensão finita e $f : E \to E'$ é uma aplicação linear injectiva então $\dim E = \dim \mathrm{Im} f \leq \dim E'$.

Continua no verso desta folha

2. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se A é invertível então 0 não é valor próprio de A.

$\boxed{\text{B}}$ Se -2 é valor próprio de A então $|A+2I_n| = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $A = I_n$ então existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $X \neq 0_{n\times 1}$ e X não é vector próprio de A.

$\boxed{\text{D}}$ Se existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $X \neq 0_{n\times 1}$ e $AX = 0_{n\times 1}$ então 0 é valor próprio de A.

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Qualquer que seja $u \in \mathbb{R}^3$ e qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $u \times (\alpha u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\boxed{\text{B}}$ Se (u, v) é uma sequência linearmente independente de vectores de $\mathbb{R}^3$ então $u \times v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

$\boxed{\text{C}}$ Quaisquer que sejam os vectores u, v e w de $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$(u \times v)|w = w|(u \times v) = -w|(v \times u).$$

$\boxed{\text{D}}$ Existem vectores u, v e w de $\mathbb{R}^3$ tais que (u, v, w) é uma sequência linearmente dependente e $(u \times v)|w \neq 0$.

4. Seja $\mathcal{R}$ a recta definida pelas equações $\begin{cases} \frac{x+2}{3} = z - 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ respectivamente os planos de equação

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 1),\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

e

$$x + y - z + 2 = 0.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A distância entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ é $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{B}}$ A recta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ intersectam-se segundo um ponto.

$\boxed{\text{C}}$ Os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são estritamente paralelos.

$\boxed{\text{D}}$ $u = (3, 0, 1)$ é um vector com a direcção da recta $\mathcal{R}$.

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathcal{M}(f; b.c., \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $b.c.$ representa a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, 1))$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $f(1, 0) = (2, -1)$ e $f(0, 1) = (1, 0)$.

$\boxed{\text{B}}$ f é bijectiva/invertível e $\mathcal{M}(f^{-1}; \mathcal{B}', b.c.) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{M}(f; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; b.c., \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-c, 0, b+2d)$, para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Mostre que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ é uma base do núcleo de f.

[0.5] (b) Indique a dimensão da imagem de f, sem determinar uma base desse espaço.

[0.5] (c) Justifique que f não é sobrejectiva nem injectiva.

[1.0] (d) Obtenha uma base da imagem de f.

Mude de Folha

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[0.5] (a) Justifique que o polinómio característico de A é $p(x) = -x(5-x)^2$.

[1.5] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Mostre que A é diagonalizável e indique $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, invertível, tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

8. Seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo de $\mathbb{R}^3$. Considere os pontos não colineares $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (0, 1, 1)$ e seja $\mathcal{P}$ o plano por eles definido.

Seja $\mathcal{R}$ a recta de equação

$$(x, y, z) = (2, k-1, 2k+3) + \lambda(1, 1, -2),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

em que $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

[0.5] (a) Calcule $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e determine a área do triângulo de vértices A, B e C.

[0.5] (b) Indique uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.

[1.0] (c) Determine o conjunto dos valores de k para os quais a distância de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{P}$ é 1.

[1.0] (d) Mostre que $\frac{\pi}{3}$ é o ângulo entre a recta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}'$ de equação $y - z = 0$.

Mude de Folha

9. Seja E um espaço vectorial e seja $f : E \to E$ uma aplicação linear tal que $f \circ f = f$. Mostre que:

[1.0] (a) $E = \operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f$.
Sugestão: Atenda a que $u = [u - f(u)] + f(u)$, para qualquer $u \in E$.

[1.0] (b) $\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

Fim