Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos pelos conjuntos:

$$F = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \wedge z = w\} \text{ e } G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ é uma base de F e $((2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$ é uma base de G.

B $F + G = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1),(2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$.

C $\dim F + G = 5$.

D $F \cap G = \{(2a, 2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

2. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de E'.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim \mathrm{Im}\, f \leqslant 3$.

B A aplicação f não é injectiva.

C $(f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4))$ é uma sequência de vectores de E' linearmente independentes.

D Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se $\mathrm{r}(A) = 3$, então a aplicação f é sobrejectiva.

Continua no verso desta folha

3. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = ((1,1),(1,0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $f(1,2) = (5,2,-1)$.

B $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{r}(A)$.

C $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

D $f(1,0) = (3,1,0)$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Os valores proprios de A são 1, 3 e 5.

B A é uma matriz diagonalizável.

C $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios, respectivamente, 5, 3 e 1.

D Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1,0,-1), B = (2,1,0)$ e $C = (1,1,-1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B A equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C é $-x + z + 2 = 0$.

C Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $(0,0,0)$ são ortogonais mas não perpendiculares.

D A recta dada pelas equações $x = 2 \wedge y - 1 = \dfrac{z}{2}$ é paralela ao plano de equação geral $-x + z + 2 = 0$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

TESTE B

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = ((1,1),(1,0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $f(1,0) = (3,1,0)$.

B $\dim \operatorname{Im} f = \mathrm{r}(A)$.

C $f(1,2) = (5,2,-1)$.

D $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

Continua no verso desta folha

2. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 0, -1), B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, 1, -1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $(0, 0, 0)$ são ortogonais mas não perpendiculares.

$\boxed{\text{B}}$ A equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C é $-x + z + 2 = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ A recta dada pelas equações $x = 2 \wedge y - 1 = \frac{z}{2}$ é paralela ao plano de equação geral $-x + z + 2 = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de E'.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4))$ é uma sequência de vectores de E' linearmente independentes.

$\boxed{\text{B}}$ A aplicação f não é injectiva.

$\boxed{\text{C}}$ Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se $\mathrm{r}(A) = 3$, então a aplicação f é sobrejectiva.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 3$.

4. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos pelos conjuntos:

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \wedge z = w\} \text{ e } G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F e $((2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de G.

$\boxed{\text{B}}$ $F \cap G = \{(2a, 2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $F + G = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim F + G = 5$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios, respectivamente, 5, 3 e 1.

$\boxed{\text{C}}$ A é uma matriz diagonalizável.

$\boxed{\text{D}}$ Os valores proprios de A são 1, 3 e 5.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

TESTE C

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é uma matriz diagonalizável.

B $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios, respectivamente, 5, 3 e 1.

C Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D Os valores proprios de A são 1, 3 e 5.

2. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos pelos conjuntos:

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \wedge z = w\} \text{ e } G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $F + G = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

B $F \cap G = \{(2a, 2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

C $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F e $((2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de G.

D $\dim F + G = 5$.

Continua no verso desta folha

3. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 0, -1), B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, 1, -1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $(0, 0, 0)$ são ortogonais mas não perpendiculares.

$\boxed{\text{B}}$ A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{\text{C}}$ A equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C é $-x + z + 2 = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ A recta dada pelas equações $x = 2 \wedge y - 1 = \dfrac{z}{2}$ é paralela ao plano de equação geral $-x + z + 2 = 0$.

4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \operatorname{Im} f = \mathrm{r}(A)$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(1, 0) = (3, 1, 0)$.

$\boxed{\text{D}}$ $f(1, 2) = (5, 2, -1)$.

5. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de E'.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4))$ é uma sequência de vectores de E' linearmente independentes.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 3$.

$\boxed{\text{C}}$ Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se $\mathrm{r}(A) = 3$, então a aplicação f é sobrejectiva.

$\boxed{\text{D}}$ A aplicação f não é injectiva.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

TESTE D

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,5$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,5$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, \mathrm{cl_M}\}$, onde $\mathrm{cl_M}$ designa a soma das classificações obtidas nos cinco grupos de escolha múltipla.

---

1. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de E'.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Se $\mathrm{r}(A) = 3$, então a aplicação f é sobrejectiva.

B $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 3$.

C $(f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4))$ é uma sequência de vectores de E' linearmente independentes.

D A aplicação f não é injectiva.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A é uma matriz diagonalizável.

B Os valores proprios de A são 1, 3 e 5.

C Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios, respectivamente, 5, 3 e 1.

Continua no verso desta folha

3. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos pelos conjuntos:

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y \wedge z = w\} \text{ e } G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $F + G = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.

B $F \cap G = \{(2a, 2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

C $\dim F + G = 5$.

D $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ é uma base de F e $((2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de G.

4. Num referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ considere os pontos $A = (1, 0, -1), B = (2, 1, 0)$ e $C = (1, 1, -1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B A recta dada pelas equações $x = 2 \wedge y - 1 = \dfrac{z}{2}$ é paralela ao plano de equação geral $-x + z + 2 = 0$.

C Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $(0, 0, 0)$ são ortogonais mas não perpendiculares.

D A equação geral do plano que passa pelos pontos A, B e C é $-x + z + 2 = 0$.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

B $f(1, 2) = (5, 2, -1)$.

C $f(1, 0) = (3, 1, 0)$.

D $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{r}(A)$.

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[3.5] **6.** Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$f(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} 0 & a_2 - a_1 \\ 2a_0 & a_0 \end{bmatrix}, \ \forall\, a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_2[x].$$

(a) Considere a base $\mathcal{B} = (x^2+1, 1-x, 1)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ e a base $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

(b) Indique, justificando, uma base do $\operatorname{Nuc} f$.

(c) Determine $\dim \operatorname{Im} f$ e conclua, justificando, se f é, ou não, sobrejectiva.

Mude de Folha

[3.5] **7.** Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Indique, justificando, os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

(c) Diga, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

[2.5] **8.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, com

$$A = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

onde $b.c._{\mathbb{R}^3}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Considere a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((2,-1,0), (3,-1,0), (-2,1,1))$. Utilizando matrizes de mudança de base conclua que $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) Utilizando a alínea anterior e sem efectuar cálculos, indique, justificando, uma base de vectores próprios de f e indique a que valor próprio está, cada um deles, associado.

Mude de Folha

[3.0] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + A^\top = 2I_n$. Mostre que:

(a) Se 2 é valor próprio de A, então A não é invertível.

(b) Se X é vector próprio de A associado ao valor próprio α, então X é vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $2 - \alpha$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Departamento de Matemática FCT–UNL

Terceiro Teste – 23 de Janeiro de 2008

Uma resolução

Escolha Múltipla

	1.	2.	3.	4.	5.
Versão A	C	C	A	D	D
Versão B	C	C	A	D	A
Versão C	C	D	D	D	A
Versão D	C	C	C	B	B

6. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
f(x^2+1) &= f(1x^2+0x+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1-0 \\ 2\times 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-\mathbf{1})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1-x) &= f(0x^2+(-1)x+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0-(-1) \\ 2\times 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-\mathbf{1})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(0x^2+0x+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0-0 \\ 2\times 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-\mathbf{2})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Por definição, $\operatorname{Nuc} f = \left\{ a_2x^2+a_1x+a_0 \in \mathbb{R}_2[x] : f(a_2x^2+a_1x+a_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Ora,

$$\begin{bmatrix} 0 & a_2-a_1 \\ 2a_0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_2 - a_1 = 0 \\ 2a_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = a_1 \\ a_0 = 0, \end{cases}$$

donde $\operatorname{Nuc} f = \{ax^2+ax : a \in \mathbb{R}\} = \{a(x^2+x) : a \in \mathbb{R}\} = \langle x^2+x \rangle$. Tendo em conta que x^2+x é não nulo, (x^2+x) é uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

(c) Sabemos que $\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$. Pela alínea anterior tem-se $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$, donde

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \operatorname{Nuc} f = 3 - 1 = 2.$$

Por outro lado, $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 2\times 2 = 4 \neq \dim \operatorname{Im} f$, concluindo-se que f não é sobrejectiva.

7. (a) O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (3-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)(2-x)^2.$$

Assim os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são:

2 com multiplicidade algébrica igual a 2 e
3 com multiplicidade algébrica igual a 1.

(b) Subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A - 2I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + 2\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[-1\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = c \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Dado que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é geradora de M_2, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

Subespaço próprio associado ao valor próprio 3:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A - 3I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1\ell_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_1 + (-2)\ell_2 \\ \ell_3 + \ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[-1\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Dado que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e como também é geradora de M_3, conclui-se que $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base deste subespaço.

(c) $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e só se, $\text{mg}(2)+\text{mg}(3) = 3$ (ordem de A). Ora $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1$ e $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$. Então $\text{mg}(2) + \text{mg}(3) = 2 \neq 3$ e portanto A não é diagonalizável.

8. (a) Consideremos o esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} b.c._{\mathbb{R}^3} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & b.c._{\mathbb{R}^3} \\ & {\scriptstyle id_{\mathbb{R}^3}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle id_{\mathbb{R}^3}} & \\ \mathcal{B} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \mathcal{B} \end{array}$$

Sendo $A = \mathcal{M}(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, b.c._{\mathbb{R}^3})$ e $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$, tem-se $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = P^{-1}AP$.

Tem-se

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos P^{-1} :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2+2l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{l_1-l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Então $P^{-1} = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^3}; b.c._{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Como a matriz da aplicação f, relativamente à base $\mathcal{B}$, é uma matriz diagonal, podemos concluir que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de f. Conclui-se também que o vector $(2, -1, 0)$ é um vector próprio associado ao valor próprio 1, $(3, -1, 0)$ é um vector próprio associado ao valor próprio 2 e $(-2, 1, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -3.

9. (a) Se 2 é valor próprio de A, então 2 é raíz do polinómio característico de A, isto é, $|A - 2I_3| = 0$. Por hipótese sabemos que $A - 2I_3 = -A^\top$, donde

$$\left|-A^\top\right| = 0 \Longrightarrow (-1)^n \left|A^\top\right| = 0 \Longrightarrow \left|A^\top\right| = 0 \Longrightarrow |A| = 0,$$

concluindo-se que A não é invertível.

(b) Sendo X um vector próprio de A associado ao valor próprio α, tem-se $AX = \alpha X$. Considerando a hipótese e o facto de A ser de tipo $n \times n$ e X de tipo $n \times 1$, vem:

$$\begin{aligned} A + A^\top = 2I_3 \quad &\Longrightarrow \quad \left(A + A^\top\right) X = 2I_3 X \\ &\Longrightarrow \quad AX + A^\top X = 2X \\ &\Longrightarrow \quad \alpha X + A^\top X = 2X \\ &\Longrightarrow \quad A^\top X = 2X - \alpha X \\ &\Longrightarrow \quad A^\top X = (2 - \alpha)X. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que X é um vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $2 - \alpha$.