

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0))$, $\mathcal{B}_2 = ((-1, 0, -1), (0, -1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_3 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Sejam $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicações lineares tais que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A f é bijectiva.

☐ B $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

☐ C $\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

☐ D $f(1, 2, 3) = (2, 6, 3).$

2. Sejam E e E' espaços vectoriais reais de dimensão finita e $f : E \longrightarrow E'$ aplicação linear.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $(e_1, \dots, e_n)$ é base de E e f é injectiva então $\dim(\text{Im } f) < n$.
- ☐ B Se $\dim E < \dim E'$ então f não é sobrejectiva.
- ☐ C Se $\dim E = \dim E'$ e f é sobrejectiva então f é bijectiva.
- ☐ D Se $\dim E > \dim E'$ então f não é injectiva.

3. Considere os espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a + b + c, 2b + c, a - b, 2a + c),$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\text{Im } f = \langle (1, 0, 1, 2), (1, 2, -1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$.
- ☐ B $((-1, -1, 2))$ é uma base de $\text{Nuc } f$.
- ☐ C $\text{Im } f = \langle (1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -1), (1, -1, 0, 0) \rangle$.
- ☐ D $\text{Im } f = \langle (1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -1) \rangle$.

4. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ considere os vectores

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 2, -1), \quad u_3 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad u_4 = (1, 2, 0).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência de vectores (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente.
- ☐ B $(0, 8, 0) \in \langle u_1, u_2, u_4 \rangle$.
- ☐ C $\dim \langle u_1, u_2, u_4 \rangle = 2$.
- ☐ D $\mathbb{R}^3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

5. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço vectorial

$$G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}$$

e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$F_\alpha = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = \alpha\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\dim G = 2$.
- ☐ B F_6 é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ C F_0 é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ D $G = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ os subespaços vectoriais

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + 2b - d = 0 \wedge a + 2b + c - 4d = 0 \wedge a + 2b - c + 2d = 0\},$$

$$G = \langle (1, 0, 3, 1), (-2, 1, 0, 0) \rangle \quad \text{e} \quad H = \langle (-1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle.$$

[2.0] (a) Determine uma base de $G + H$ e indique $\dim G \cap H$.

[1.5] (b) Determine uma base de F e indique $\dim F$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Sem calcular os valores e vectores próprios de A , averigúe se $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A .

[1.5] (b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1.5] (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A . Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

[1.0] (d) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

8. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$, e λ valor próprio de A . Prove que:

[1.0] (a) $(A - \lambda I_n) \operatorname{adj}(A - \lambda I_n) = 0_{n \times n}$.

[1.5] (b) Todo o vector coluna, não nulo, da matriz $\operatorname{adj}(A - \lambda I_n)$ é um vector próprio de A . Qual o valor próprio que lhe corresponde?

Fim

1. C

2. A

3. C

4. B

5. B

6. (a) Dado que $G = \langle (1, 0, 3, 1), (-2, 1, 0, 0) \rangle$ e $H = \langle (-1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$ sabemos que

$$G + H = \langle (1, 0, 3, 1), (-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle.$$

Determinemos uma sequência geradora, linearmente independente, de $G + H$.

Cálculo auxiliar:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2+2l_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_4+(-1)l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_4+l_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.}).$$

Temos

$$G + H = \langle (1, 0, 3, 1), (0, 1, 6, 2), (0, 0, 5, 2) \rangle$$

e, como as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes, concluímos que

$$S = \left((1, 0, 3, 1), (0, 1, 6, 2), (0, 0, 5, 2) \right)$$

é uma sequência linearmente independente. Como S gera $G + H$ e é linearmente independente, constitui uma base de $G + H$.

Como $\dim(G + H) = 3$, para determinar $\dim(G \cap H)$ basta calcular primeiro $\dim G$ e $\dim H$ pois

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H). \quad (1)$$

Notemos que $((1, 0, 3, 1), (-2, 1, 0, 0))$ é uma base de G pois gera G e é linearmente independente ($\alpha(1, 0, 3, 1) + \beta(-2, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), logo $\dim G = 2$.

Analogamente, $((-1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 0))$ é uma base de H pois gera H e é linearmente independente ($\alpha(-1, 0, 2, 1) + \beta(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), logo $\dim H = 2$.

Atendendo a (1), concluímos que $\dim(G \cap H) = 1$.

(b) Começamos por determinar uma sequência de vectores geradora de

$$F = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{a + 2b - d = 0 \wedge a + 2b + c - 4d = 0 \wedge a + 2b - c + 2d = 0}_{\text{Sistema } AX = 0, \text{ nas incógnitas } a, b, c, d, \text{ a resolver}} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{l_2+(-1)l_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3+l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}).$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = -2b + d \wedge c = 3d\} = \{(-2b + d, b, 3d, d) : b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2b, b, 0, 0) + (d, 0, 3d, d) : b, d \in \mathbb{R}\} = \{b(-2, 1, 0, 0) + d(1, 0, 3, 1) : b, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\langle (-2, 1, 0, 0), (1, 0, 3, 1) \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $((-2, 1, 0, 0), (1, 0, 3, 1))$ é uma base de F pois gera F e é linearmente independente ($\alpha(-2, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 3, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), logo $\dim F = 2$.

7. (a) Dado que $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, sabemos que uma matriz coluna X , não nula, de $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ é vector próprio de A , associado ao valor próprio λ , se $AX = \lambda X$. Como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3 \times 1}\} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

concluimos que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 3.

- (b) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (2 - \lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (2 - \lambda)(\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e 3, com $\text{ma}(2) = 1$ e $\text{ma}(3) = 2$.

- (c) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente

independente $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1$.

- Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3. Tem-se:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 3I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\iota_3 + (-1)\iota_2]{(-1)\iota_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\iota_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 pois gera M_3 e é linearmente

independente $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$.

- (d) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Pela alínea anterior, temos $\text{mg}(2) + \text{mg}(3) = 2 \neq 3 = \text{ordem de } A$, logo A não é diagonalizável.

8. (a) Sabemos que

$$(A - \lambda I_n) \text{adj}(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n| I_n.$$

Como, por hipótese, λ é um valor próprio de A , temos

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

e, portanto,

$$(A - \lambda I_n) \text{adj}(A - \lambda I_n) = 0 I_n = 0_{n \times n}.$$

- (b) Da igualdade $(A - \lambda I_n) \text{adj}(A - \lambda I_n) = 0_{n \times n}$ resulta que

$$A \text{adj}(A - \lambda I_n) - \lambda I_n \text{adj}(A - \lambda I_n) = 0_{n \times n}$$

ou, equivalentemente,

$$A \text{adj}(A - \lambda I_n) = \lambda \text{adj}(A - \lambda I_n).$$

Representemos por X_i , $i = 1, \dots, n$, a i -ésima coluna de $\text{adj}(A - \lambda I_n)$. Da igualdade

$$A[X_1 \mid \dots \mid X_n] = \lambda[X_1 \mid \dots \mid X_n]$$

concluimos que

$$AX_1 = \lambda X_1, \dots, AX_n = \lambda X_n$$

e, portanto, cada vector coluna não nulo de $\text{adj}(A - \lambda I_n)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ .