PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: _____

Número de caderno:

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Atenção

Os primeiros 6 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 6 grupos apenas uma das afirmações é **FALSA**. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 6) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 6 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 3 horas.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A As matrizes A e C têm característica 2 e B tem característica 3.
- B $\det B = 4$ e $B \cdot \text{adj } B = 4I_3$.
- C $C^{-1} \neq \text{adj } C$.
- D A matriz A não está em forma de escada reduzida mas efectuando uma única transformação elementar, sobre linhas, pode obter-se uma matriz nessa forma.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível, com $\det A = \alpha$. Seja $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com $\det B = \beta$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det(A^{-1}B^3) = \frac{\beta^3}{\alpha}$.

B $\det \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d - 2a & e - 2b & f - 2c \\ -g & -h & -i \end{bmatrix} \right) = \alpha$.

C $\det \left(\begin{bmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{bmatrix} \right) = 6\alpha$.

D $\det(-2AB^T) = -8\alpha\beta$.

Continua no verso desta folha

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ x + 2(\beta + 1)y + z = \alpha \\ -x - 2y + \alpha z = \beta - \alpha \end{cases} .$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é possível determinado.
- B Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.
- C Se $\alpha = 0 = \beta$ então o sistema é possível indeterminado e o conjunto das suas soluções é $\{(-2b, b, b) : b \in \mathbb{R}\}$.
- D Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.
4. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vectoriais $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = -b + d \wedge c = 0\}$ e $G = \langle (0, 2, 0, 2), (0, 0, 0, 1) \rangle$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $F = \langle (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$.
- B $\dim G = 2$.
- C $(0, 2, 0, 2) \in (F \cap G)$.
- D $\dim(F + G) = 4$.
5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- B $f(3, 6, -3) = 3f(1, 2, -1)$.
- C Se $\text{Nuc } f = \langle (1, 1, 2), (0, 1, 0) \rangle$ então $\dim \text{Im } f = 2$.
- D f não é sobrejectiva.

6. Considere, em $\mathbb{R}^3$, um referencial ortonormado e directo. Seja $\mathcal{P}$ o plano de equação geral $3x - y + 2z - 4 = 0$ e $\mathcal{R}$ a recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(-2, 2, 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A A recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.
- B O vector $(3, 1, 2)$ é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.
- C $-3x + y - 2z + 2 = 0$ é uma equação geral do plano estritamente paralelo ao plano $\mathcal{P}$ e que passa no ponto $C = (0, 0, 1)$.
- D Os pontos $A = (0, 0, 2)$ e $B = (2, 0, -1)$ pertencem ao plano $\mathcal{P}$ e definem, com o ponto $C = (0, 0, 1)$, um triângulo cuja área é 1.

2ª Parte

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

7. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ tais que

$$A \xrightarrow{l_3+2l_1} B \xrightarrow{3l_2} C,$$

onde $l_3 + 2l_1$ significa que se adicionou à linha 3 a linha 1 multiplicada por 2 e $3l_2$ significa que a linha 2 foi multiplicada por 3.

[1.5] (a) Indique matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $C = E_2E_1A$.

[1.0] (b) Indique transformações elementares, sobre linhas, T_1 e T_2 tais que $B \xrightarrow{T_1} A$ e $C \xrightarrow{T_2} B$.

Mude de Folha

8. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

[1.5] (a) Utilizando o Teorema de Laplace, calcule o determinante de B .

[1.0] (b) Para que valores de β a matriz B é invertível?

Mude de Folha

9. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ é tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Justifique que A é diagonalizável.

[1.0] (b) Indique, caso exista, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 - 2A = -I_n$. Mostre que:

[1.0] (a) A e $A - 2I_n$ são ambas invertíveis.

[1.5] (b) Se α é valor próprio de A então $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$.

[1.0] (c) Se A é diagonalizável então $A = I_n$.

Fim