FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- **Duração: 2 horas (+ 30 minutos de tolerância).**

---

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A C é uma matriz elementar do tipo III.

B Se $A \xrightarrow[l_2+2l_1]{} A'$ então $A' = AC$.

C AB e BA são matrizes quadradas e $A = B^T$.

D AA^T e $C + C^T$ são matrizes quadradas.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se zero não é valor próprio de A então o sistema $AX = B$ é possível determinado.

B Existem matrizes $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ para as quais o sistema $AX = B$ é impossível.

C Se $\det A \neq 0$ então o sistema $AX = C$ é um sistema de Cramer.

D Se o sistema $AX = B$ é indeterminado então A não é invertível.

3. Sejam $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b \ \wedge \ c = b\}$ e $G = \langle (2, 1, 0), (-1, 1, -2), (0, 3, -4) \rangle$ subespaços do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $F = \{(2b, b, b) : b \in \mathbb{R}\}$.

B $\dim G = 3$.

C $((2, 1, 0), (-1, 1, -2))$ é uma sequência linearmente independente de vectores de G.

D $F = \langle (2, 1, 1), (6, 3, 3) \rangle$.

4. Sejam F e G subespaços do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ tais que:

$F = \langle (1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 1) \rangle$; $G = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (0, 1, 0, 0) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim F = 2$ e $\dim G = 3$.

B $F \subseteq G$ logo $\dim F \cap G = 2$.

C $\dim(F + G) = 5$.

D $F \cup G$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$ porque $F \subseteq G$.

5. Considere um referencial ortonormado $(0; e_1, e_2, e_3)$ e os vectores $u = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, $v = -e_1 + e_3$ e $w = 2e_1 - 2e_3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $u|v = 0$ logo u é perpendicular a v.

B $v \times w = 0$ portanto v e w são linearmente dependentes.

C Os vectores u e $2v + w$ são perpendiculares pois o seu produto interno é zero.

D $(u \times v)|w = 0$ logo u, v e w são vectores complanares.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(a,b,c) : a = 0\}$ e $G = \{(a,b,c) : a = 2b\}$.

[1.0] (a) Indique uma base de F e uma base de G.

[1.0] (b) Determine uma base de $F \cap G$.

[1.0] (c) Indique um conjunto de geradores para $F + G$ e determine $\dim(F + G)$.

Mude de Folha

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $f(a,b,c) = (a+b, c, a)$, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Sejam $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,1,1),(0,1,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1))$ bases de $\mathbb{R}^3$.

[1.5] (a) Determine $A = \mathcal{M}(f; bc_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.

[0.5] (b) Indique $\dim \mathrm{Nuc}\, f$ e conclua, justificando, se f é injectiva.

[0.5] (c) Justifique que a matriz A determinada na alínea a) é invertível.

[1.0] (d) Utilizando matrizes de mudança de base determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios. Indique a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A.

[1.0] (c) Conclua que A é diagonalizável e indique, justificando, uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ semelhante a A.

Mude de Folha

9. Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear tal que $f^2 = f$.

Mostre que:

[0.5] (a) $f(y) = y$, $\forall y \in \mathrm{Im} f$;

[0.5] (b) $x - f(x) \in \mathrm{Nuc} f$, $\forall x \in E$;

[1.5] (c) $E = \mathrm{Nuc} f \oplus \mathrm{Im} f$.

(Sugestão: Verifique que todo o elemento x de E se pode escrever como $[x - f(x)] + f(x)$.)

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *C*

Uma resolução com notas explicativas

1. B

2. B

3. B

4. C

5. C

6. (a) Calculemos uma base para o subespaço F.

Temos que $F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0\} = \{(0,b,c) : b,c \in \mathbb{R}\}$, assim, para qualquer vector de F tem-se:

$(0,b,c) = (0,b,0) + (0,0,c) = b(0,1,0) + c(0,0,1)$.

Podemos então concluir que $F = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.

Como estes geradores de F são apenas dois e nenhum deles é múltiplo escalar do outro, garantimos que são linearmente independentes e, portanto, uma base de F. Assim sendo, vem

$$\text{base de } F = ((0,1,0), (0,0,1)).$$

De forma análoga, determinemos a base de G.

Temos que $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} = \{(2b,b,c) : b,c \in \mathbb{R}\}$, donde, para qualquer vector de G, tem-se:

$(2b,b,c) = (2b,b,0) + (0,0,c) = b(2,1,0) + c(0,0,1)$.

Dado que os vectores $(2,1,0), (0,0,1)$ são geradores de G e não são múltiplos escalares um do outro, podemos afirmar que

$$\text{base de } G = ((2,1,0), (0,0,1)).$$

(b) Para indicar uma base de $F \cap G$, determinemos, em primeiro lugar, este subespaço.

$F \cap G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge a = 2b\} = \{(0,0,c) : c \in \mathbb{R}\}$.

Para qualquer vector de $F \cap G$ tem-se $(0,0,c) = c(0,0,1)$. Podemos então concluir que

$$\text{base de } F \cap G = ((0,0,1)),$$

uma vez que este vector é gerador de $F \cap G$ e, porque é um único vector não nulo, é linearmente independente.

(c) O conjunto dos geradores de $F + G$ pode ser obtido pela união dos geradores de F com os geradores de G.

Assim, como conhecemos bases para F e para G, temos que

$$F + G = \langle (0,1,0), (0,0,1), (2,1,0), (0,0,1) \rangle = \langle (0,1,0), (0,0,1), (2,1,0) \rangle.$$

Dispondo estes vectores nas linhas duma matriz e levando-a à forma de escada obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Uma vez que, a matriz em forma de escada obtida não tem linhas nulas, podemos concluir que os vectores são uma base de $F+G$.

Logo $\dim(F+G)=3$

Resolução alternativa para a determinação da $\dim(F+G)$:

Pelo teorema da dimensão sabemos que

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Pelas alíneas anteriores sabemos que $\dim F=2$, $\dim G=2$ e $\dim(F\cap G)=1$. Usando o teorema da dimensão vem

$$\dim(F+G)=2+2-1=3.$$

7. (a) Para a determinação de $A=\mathcal{M}(f;bc_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}')$, calculemos, primeiramente, a imagem, por f, de cada um dos vectores da base do espaço de partida (neste caso, a base canónica de $\mathbb{R}^3$) e em seguida escrevamos cada uma das imagens obtidas como combinação linear dos vectores da base do espaço de chegada (neste caso $\mathcal{B}'$):

$f(1,0,0)=(1,0,1)=2(1,0,0)-1(1,1,0)+1(0,1,1)$

$f(0,1,0)=(1,0,0)=1(1,0,0)+0(1,1,0)+0(0,1,1)$

$f(0,0,1)=(0,1,0)=-1(1,0,0)+1(1,1,0)+0(0,1,1)$

Dispondo, numa matriz, os coeficientes obtidos por ordem e por coluna obtemos

$$A=\mathcal{M}(f;bc_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b) Por definição, $\operatorname{Nuc} f=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:f(a,b,c)=(0,0,0)\}$.

Neste caso $\operatorname{Nuc} f=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:(a+b,c,a)=(0,0,0)\}$, ou seja

$$\operatorname{Nuc} f=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a+b=0\wedge c=0\wedge a=0\}=\{(0,0,0)\}.$$

Assim, $\dim(\operatorname{Nuc} f)=0$. Como uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo tem dimensão zero, concluimos que f é injectiva.

(c) A matriz A é invertível se $\mathrm{r}(A)=3$. Uma vez que f é uma aplicação linear, sabemos que $\mathrm{r}(A)=\dim(\operatorname{Im} f)$. Pelo teorema da dimensão, temos que

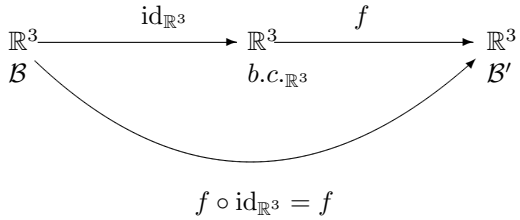
$$\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\operatorname{Nuc} f)+\dim(\operatorname{Im} f).$$

Assim, porque $\dim(\operatorname{Nuc} f)=0$ e $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, concluimos que $\dim(\operatorname{Im} f)=3$ e, portanto, A é invertível.

(Alternativamente, poder-se-ia concluir que $\mathrm{r}(A)=3$ levando a matriz A à forma de escada.

Ou, ainda, calculando o $\det(A)$ e verificando que era não nulo poder-se-ia concluir, igualmente, sobre a invertibilidade de A.)

(d) Consideremos o seguinte diagrama:



.

$$f\circ\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}=f$$

Considerando a matriz de mudança de base $P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, bc_{\mathbb{R}^3})$ e, dado que, a matriz da composição de duas aplicações lineares é o produto das matrizes, e tendo em atenção o diagrama, temos

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(f; bc_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}').\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, bc_{\mathbb{R}^3}),$$

ou seja,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = AP.$$

Determinemos a matriz P. Como P é a matriz da aplicação linear identidade, procedemos de forma análoga à alínea a). Assim,

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,1,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,1,1) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1),$

portanto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz pedida é dada pelo produto de A por P, isto é:

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico, isto é, os valores de x para os quais $|A - xI_3| = 0$.

O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 4 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 2 & -2-x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_1}{=}} (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 2 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)\left[(2-x)(-2-x) + 0\right] = (2-x)^2(-2-x).$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e -2, com $\mathrm{ma}(2) = 2$ e $\mathrm{ma}(-2) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1/2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ b = 2c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2c \\ c \end{bmatrix} : \ a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Seja M_{-2} o subespaço próprio de A associado ao valor próprio -2. Tem-se:

$$M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{-2\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A+2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A+2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-2)l_2]{(\frac{1}{4})l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1+\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = -c \ \wedge \ b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Sabemos que $\text{mg}(\alpha) = \dim M_\alpha$, como $\dim M_{-2} = 1$ e $\dim M_2 = 2$ podemos afirmar que $\text{mg}(-2) = 1$ e $\text{mg}(2) = 2$.

(c) Como $\text{mg}(-2) + \text{mg}(2) = 3 =$*ordem da matriz* podemos concluir que A é diagonalizável. Uma vez que A é diagonalizável, qualquer matriz diagonal, cujos elementos diagonal sejam os valores próprios de A e apareçam em número igual às suas multiplicidades geométricas, será semelhante a A. A matriz D será, por exemplo,

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. (a) Seja $y \in \text{Im}(f)$, arbitrário, então existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$.
Deste modo $f(y) = f(f(x)) \Leftrightarrow f(y) = f^2(x)$. Como, por hipótese, $f^2 = f$, temos $f(y) = f(x) = y$, como pretendíamos.

(b) Um vector $u \in E$ é um vector do núcleo de f se, e só se, $f(u) = 0_E$.
Verifiquemos que $x - f(x) \in \text{Nuc}\, f$ determinando a sua imagem por f.
$f[x - f(s)] =$ (porque f é linear)
$f(x) - f^2(x) =$ (por hipótese)
$f(x) - f(x) = 0_E$.
Logo $x - f(x) \in \text{Nuc}\, f$.

(c) Seguindo a sugestão, é fácil verificar que $[x - f(x)] + f(x) = x - [f(x) - f(x)] = x - 0_E = x$.
Tendo em atenção b) e a definição de $\text{Im}\, f$, e dado que, $x - f(x) \in \text{Nuc}\, f$ e $f(x) \in \text{Im}\, f$, concluímos que todo o vector $x \in E$ se escreve como soma de um vector do núcleo de f com um vector da imagem de f e, portanto,

$$E = \text{Nuc}\, f + \text{Im}\, f.$$

Tomemos um vector $u \in \text{Nuc}\, f \cap \text{Im}\, f$. Temos

- $u \in \text{Nuc}\, f$ logo $f(u) = 0_E$
- $u \in \text{Im}\, f$ e, por a)$f(u) = u$

Podemos então concluir que se $u \in \text{Nuc}\, f \cap \text{Im}\, f$ então $f(u) = 0_E = u$, logo $\text{Nuc}\, f \cap \text{Im}\, f = \{0_E\}$ e, portanto

$$E = \text{Nuc}\, f \oplus \text{Im}\, f.$$