Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame da Época de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				X
2.		X		
3.				X
4.			X	
5.			X	
6.			X	

Atenção

Os primeiros 6 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 6 grupos apenas uma das afirmações é FALSA. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 6) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 6 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 3 horas.**

---

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A B e C têm a mesma forma de escada reduzida.

B A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

C C não está em forma de escada.

D O sistema $AX = 0$ é possível indeterminado.

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e B e C tais que $A \xrightarrow[3l_2]{} B \xrightarrow[l_2+4l_3]{} C$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

B Pode ter-se A invertível e C não invertível.

C $\det B = \det C$.

D $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + (\alpha+1)y + 2z = 3 \\ x + (\alpha+1)y + \beta z = \alpha + 3 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\beta \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ então o sistema é possível determinado.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado e o conjunto das soluções é $\{(2-c, 1-c, c) : c \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha = -1$ então o sistema é possível se, e só se, $\beta \neq 2$.

4. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$, $u_3 = (2, 2, -1)$ e $u_4 = (1, -2, 1)$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ (u_1, u_2, u_3) é uma sequência linearmente dependente.

$\boxed{\text{B}}$ (u_1, u_2, u_4) é uma sequência linearmente independente.

$\boxed{\text{C}}$ u_3 não é combinação linear dos vectores u_1, u_2.

$\boxed{\text{D}}$ (u_1, u_2, u_4) e (u_1, u_3, u_4) são bases de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $f(2, 0, 0) = 2f(1, 0, 0)$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(2, 3, 5) = f(2, 3, 0) + f(0, 0, 5)$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 2))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$, então $f(1, 0, 0) = (1, -3, 2, 8)$.

$\boxed{\text{D}}$ f não é sobrejectiva.

6. Considere, em $\mathbb{R}^3$, um referencial ortonormado. Seja $\mathcal{P}$ o plano de equação geral $2x + 3y - z + 4 = 0$ e $\mathcal{R}$ a recta de equação vectorial

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda(1, -1, -1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{B}}$ O vector $(-2, -3, 1)$ é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{C}}$ Os pontos $A = (0, -1, 1)$ e $B = (-2, 1, 3)$ pertencem ao plano $\mathcal{P}$ e $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{6}$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $A = (0, -1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ e $C = (-2, -1, 3)$ entaõ $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC} = 8$.

2ª Parte

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

7. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

[1.0] (a) Determine matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1B = I_3$.

[1.0] (b) Escreva B como um produto de matrizes elementares.

Mude de Folha

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(a, b, c) = (a - 2b, 0, c)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.0] (a) Determine o núcleo de f e uma sua base.

[1.0] (b) Indique, justificando, a dimensão da imagem de f.

[1.0] (c) Determine $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$ sendo $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = ((0, 1, 0), (-1, 0, 0), (0, 0, 2))$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$.

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico de A é $|A - xI_3| = -x(x - 1)^2$.

[1.0] (b) Determine os subespaços próprios de A e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio de A.

[1.0] (c) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

[1.0] **10.** (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + A^2 = I_n$. Mostre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

[2.0] (b) Seja $f : E \to E$ uma aplicação linear, com E de dimensão finita. Mostre que $Nuc\ f = Nuc\ f^2$ se, e só se, $Im\ f = Im\ f^2$, onde $f^2 = f \circ f$.

Fim