FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso
11 de Fevereiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e trinta minutos de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração do Exame: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

---

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ e $\mathcal{B}_2 = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(g; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

B $g(1,1,1) = (1,2,3)$.

C $g(0,1,1) = (0,1,2)$.

D g não é injectiva.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $Q, R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A QR é invertível se, e só se, Q e R são ambas matrizes invertíveis.

B Se $|P| = 2$ então P é invertível e $\left|P^{-1}\right| = |P|$.

C Se $QR = RQ$ então $(Q - R)(Q + R) = Q^2 - R^2$.

D $|QR| = |Q||R| = |R||Q| = |RQ|$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\operatorname{Im} f = \big\langle f(1,0), f(0,1)\big\rangle$.

B f não é sobrejectiva.

C Se f é injectiva então a sequência de vectores $\big(f(1,0), f(0,1)\big)$ é linearmente dependente.

D Para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $f(a, b) = af(1, 0) + bf(0, 1)$.

4. Seja $P \in \mathcal{M}_{7\times 7}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A P tem característica 7.

B I_7 é a forma de escada reduzida de P.

C P pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

D $|-P| = |P|$.

5. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes definidas da seguinte forma:

- Q_1 é a matriz que se obtém de Q multiplicando a linha 1 por -3;
- Q_2 é a matriz que se obtém de Q_1 adicionando à linha 1 a linha 2 multiplicada por 4;
- Q_3 é a matriz que se obtém de Q_2 trocando as linhas 1 e 2.

Em esquema, temos

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $|Q| = 6$ então $|Q_3| = 2$.

B Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C Se $Q_3 = I_2$ então $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

D $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}Q$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso
11 de Fevereiro de 2009

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Calcule, utilizando o Teorema de Laplace, o determinante de A. Justifique que A é invertível.

[2.0] (b) Determine A^{-1}.

Mude de Folha

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a, b, c) = (a + b + c,\ a + 2b + 3c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.5] (a) Determine uma base do núcleo de f. Indique, justificando, se f é injectiva.

[1.0] (b) Determine uma base da imagem de f.

[1.0] (c) Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ e $\mathcal{B}_2 = \big((1,1),(1,0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Mude de Folha

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1.5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A. Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

[1.0] (c) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

[2,0] **9.** Sejam α e β, $\alpha \neq \beta$, valores próprios de uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sabendo que X e Y são vectores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios α e β, prove que

$$X^\top Y = 0.$$

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso – 11 de Fevereiro de 2009

Uma resolução com notas explicativas

1. D

2. B

3. C

4. D

5. A

6. (a) Aplicando o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante, por exemplo, à linha 3 de A, tem-se

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{=\!=\!=}_{l_3} 2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(-1\times1-1\times1)+5\times(1\times1-(-1)\times0) = -4+5 = 1.\end{aligned}$$

Como $|A| = 1 \neq 0$ concluímos que A é invertível.

(b) Como A é invertível, tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\top} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

■Alternativamente, podíamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid A^{-1}]$.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3+(-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{l_3+(-2)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{l_2+(-1)l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{l_1+l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

7. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ f(a,b,c) = (0,0)\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ (a+b+c,\, a+2b+3c) = (0,0)\} \\ &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ \underbrace{a+b+c=0 \ \wedge \ a+2b+3c=0}_{\text{Sistema } AX=0,\text{ nas incógnitas } a,b,c,\text{ a resolver.}}\right\}.\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$[A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{l_2+(-1)l_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{l_1+(-1)l_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} f &= \big\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ a=c\ \wedge\ b=-2c\big\}\\ &= \{(c,-2c,c) :\ c\in\mathbb{R}\}\\ &= \{c(1,-2,1) :\ c\in\mathbb{R}\}\\ &= \Big\langle (1,-2,1)\Big\rangle .\end{aligned}$$

A sequência $\big((1,-2,1)\big)$ é uma base de $\operatorname{Nuc} f$ porque gera $\operatorname{Nuc} f$ e é linearmente independente (basta notar que $(1,-2,1)\neq(0,0,0)$).

Como uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo é constituído apenas pelo vector nulo, concluímos que f não é injectiva.

(b) Dado que $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, pelo Teorema da Dimensão, sabemos que $\dim\mathbb{R}^3=\dim\operatorname{Nuc} f+\dim\operatorname{Im} f$. Como $\dim\mathbb{R}^3=3$ e, pela alínea anterior, $\dim\operatorname{Nuc} f=1$ concluímos que $\dim\operatorname{Im} f=2=\dim\mathbb{R}^2$. Como $\operatorname{Im} f\subseteq\mathbb{R}^2$ e $\dim\operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}^2$ vem que $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$. Assim, qualquer base de $\mathbb{R}^2$ é base de $\operatorname{Im} f$. Temos, por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\big((1,0),(0,1)\big)$.

■Alternativamente:

Por definição, temos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(a,b,c) :\ a,b,c\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(a+b+c,\ a+2b+3c) :\ a,b,c\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(a,\ a)+(b,\ 2b)+(c,\ 3c) :\ a,b,c\in\mathbb{R}\}\\ &= \{a(1,1)+b(1,2)+c(1,3) :\ a,b,c\in\mathbb{R}\}\\ &= \Big\langle (1,1),(1,2),(1,3)\Big\rangle .\end{aligned}$$

A sequência $\big((1,1),(1,2),(1,3)\big)$ gera $\operatorname{Im} f$ mas não é linearmente independente. Como

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right]\xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{l_2+(-1)l_1}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right]\xrightarrow{l_3+(-2)l_2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que a sequência $\big((1,1),(0,1)\big)$ é uma base de $\operatorname{Im} f$ pois também gera $\operatorname{Im} f$ e é linearmente independente.

■

(c) Como

$$\begin{array}{rcccccl} f(1,1,1) & = & (3,6) & = & \mathbf{6}(1,1) & + & (-\mathbf{3})(1,0) \\ f(0,1,1) & = & (2,5) & = & \mathbf{5}(1,1) & + & (-\mathbf{3})(1,0) \\ f(0,0,1) & = & (1,3) & = & \mathbf{3}(1,1) & + & (-\mathbf{2})(1,0) \end{array},$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, temos $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)=\left[\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{array}\right]$.

8. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}|A-xI_3| &= \left|\begin{array}{ccc} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{array}\right| \overset{\text{Lapl. } l_3}{=} -x(-1)^{3+3}\left|\begin{array}{cc} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{array}\right| \\ &= -x\left[(1-x)^2-1^2\right] = -x(1-x-1)(1-x+1) = x^2(2-x).\end{aligned}$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 2, com $\mathrm{ma}(0) = 2$ e $\mathrm{ma}(2) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - \alpha I_3)X = 0\}\,.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{-1l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = b \ \wedge \ c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\mathrm{mg}(2) = \dim M_2 = 1$.

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = -b - c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b - c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente (basta ver que $\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$). Tem-se, então, que $\mathrm{mg}(0) = \dim M_0 = 2$.

(c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Pela alínea anterior, temos

$$\mathrm{mg}(2) + \mathrm{mg}(0) = 3 = \text{ ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável.

9. Como X e Y são vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ associados, respectivamente, aos valores próprios α e β, temos $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$, $AX = \alpha X$ e $AY = \beta Y$. Vejamos que, como A é simétrica (isto é, $A^\top = A$) e $\alpha \neq \beta$, tem-se $X^\top Y = 0$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade $AY = \beta Y$, à esquerda, por $X^\top$ obtemos

$$X^\top AY = \beta X^\top Y$$

que é equivalente à igualdade

$$X^\top A^\top Y = \beta X^\top Y$$

pois, por hipótese, A é simétrica. Atendendo a que

$$X^\top A^\top Y = \beta X^\top Y \Leftrightarrow (AX)^\top Y = \beta X^\top Y$$

e como, por hipótese,

$$AX = \alpha X$$

obtemos

$$\begin{aligned} & (\alpha X)^\top Y = \beta X^\top Y \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha X^\top Y = \beta X^\top Y \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha X^\top Y - \beta X^\top Y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha - \beta) X^\top Y = 0. \end{aligned}$$

Dado que, por hipótese, $\alpha \neq \beta$, de $(\alpha - \beta)X^\top Y = 0$ resulta que $X^\top Y = 0$.