FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame Normal – 29 de Janeiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:_____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- **Duração: 2 horas (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}),\ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $E_1 A$ é a matriz que se obtém de A substituíndo a linha 3 pela sua soma com a linha 1.

B $E_1 E_2 A = E_2 E_1 A$.

C $E_3 E_2 E_1 A$ está em forma de escada.

D $r(A) = 3$.

Continua no verso desta folha

2. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de três equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + \alpha z = 3 \\ x + (\beta - 3)y + 2\alpha z = \alpha + 3 \\ x + 2\alpha z = 4 \end{cases} .$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Qualquer que seja β real, se $\alpha = 0$ o sistema é impossível.

B Para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 3$ o sistema é um sistema de Cramer.

C Se $\alpha \neq 1$ e $\beta = 3$ o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação igual a 1.

D Para $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, $(2, 0, 1)$ é uma solução do sistema.

3. Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ uma base de E e v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores arbitrários de E.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A (e_1, e_3, e_4) é uma sequência linearmente independente de vectores de E.

B $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, v_3)$ é uma sequência geradora de vectores de E.

C Se $F =< e_1, e_2, e_3, v_1, v_2, v_3, v_4 >$ então $\dim F = 7$.

D Se $(v_1, v_2, v_3, v_4, e_2)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de E então é uma base de E.

4. Considere no referencial ortonormado directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ os vectores

$$\overrightarrow{OA} = 2e_1 + 2e_2, \quad \overrightarrow{OB} = -e_1 + e_3 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OC} = e_2 - e_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A área do triângulo [OAB] é $\sqrt{3}$.

B O vector $\overrightarrow{OA}$ é perpendicular ao eixo OZ.

C Os vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, e $\overrightarrow{OC}$ não são complanares .

D O volume do paralelipípedo determinado pelos vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, e $\overrightarrow{OC}$ é $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) | \overrightarrow{OC}$.

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det A = -a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

B $\det(2A) = 2^4 \det A = 48a$.

C Se $a \neq 0$ a matriz A é invertível.

D Se $a = 1$ então $(adjA)_{12} = -7a = -7$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame Normal – 29 de Janeiro de 2009

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.5] (a) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa.

[1.0] (b) Calcule $(adjA)_{31}$ e $\hat{A}_{23}$.

[1.0] (c) Sejam $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Resolva o sistema $AX = B$ utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

Mude de Folha

7. Seja $g : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear tal que $g(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+b+d, a+b, a+c, c+d)$. Sejam $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$ bases de $\mathbb{R}_3[x]$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

[1.5] (a) Determine $A = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}, bc_{\mathbb{R}^4})$.

[1.0] (b) Sabendo que $B = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine uma matriz de mudança de base P tal que $B = PA$.

[0.5] (c) Utilizando a matriz B da alínea anterior calcule $g(2x^2 + 3x)$.

Mude de Folha

8. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Calcule os valores próprios de A indicando as respectivas multiplicidades algébricas.

[1.5] (b) Determine a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de A, utilizando os subespaços próprios a eles associados.

[0.5] (c) Justifique a seguinte frase: "A é diagonalizável mas não é invertível."

Mude de Folha

9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear injectiva. Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(a,b) = (a+b, f(a)), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Justifique que:

[1.5] (a) g é linear.

[1.0] (b) g é injectiva.

[0.5] (c) g é um isomorfismo.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Uma resolução com notas explicativas

1. B

2. C

3. C

4. D

5. D

6. (a) Sabemos que A é invertível se $\det A \neq 0$. Calculemos o determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{=}_{l_1} 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 15 - 18 = -3 \neq 0.$$

Logo A é invertível.

A inversa de uma matriz invertível A pode ser calculada atendendo a que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A$.

Como $\text{adj}A = (\widehat{A})^T$ e dado que $(\widehat{A})_{ij} = (-1)^{i+j}A(i|j)$ vem $\widehat{A} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ -4 & -2 & -3 \\ -6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ logo

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 15 & -4 & -6 \\ 9 & -2 & -3 \\ 9 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assim $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 15 & -4 & -6 \\ 9 & -2 & -3 \\ 9 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & \frac{4}{3} & 2 \\ -3 & \frac{2}{3} & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução alternativa:

Ora A é invertível se, e só se, $\text{r}(A) = 3$. Tomemos a matriz A e levemo-la à forma de escada: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - 3l_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo $\text{r}(A) = 3$ e portanto A é invertível.

Se ampliarmos a matriz A com a I_3 obtendo $[A|I_3]$, sabemos que fazendo transformações elementares nas linhas desta matriz até a levarmos a f.e.r., obtemos $[I_n|A^{-1}]$.

Assim

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 - 3l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{l_2 - 3l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & \frac{4}{3} & 2 \\ -3 & \frac{2}{3} & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Por definição $(\text{adj}A)_{31} = \widehat{A}_{13} = (-1)^{1+3}A(1|3)$ que neste caso é $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9$.

Por outro lado, $\widehat{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$.

(c) Multiplicando à esquerda ambos os membros do sistema $AX = B$ por A^{-1}, obtemos um sistema equivalente, temos pois que

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_3X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$

A solução do sistema é dada por $A^{-1}B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} -5 & \frac{4}{3} & 2 \\ -3 & \frac{2}{3} & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Temos então que $x = -2, y = 0$ e $z = -1$.

7. (a) Para determinar $A = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^4})$, calculemos as imagens por g dos vectores da base $\mathcal{B}$:

$g(x^3) = (1,1,1,0), g(x^2) = (1,1,0,0), g(x) = (0,0,1,1), g(1) = (1,0,0,1).$

Encontramos as coordenadas destas imagens com respeito à base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} (1,1,1,0) &= 1.(1,0,0,0) + 1.(0,1,0,0) + 1.(0,0,1,0) + 0.(0,0,0,1), \\ (1,1,0,0) &= 1.(1,0,0,0) + 1.(0,1,0,0) + 0.(0,0,1,0) + 0.(0,0,0,1), \\ (0,0,1,1) &= 0.(1,0,0,0) + 0.(0,1,0,0) + 1.(0,0,1,0) + 1.(0,0,0,1), \\ (1,0,0,1) &= 1.(1,0,0,0) + 0.(0,1,0,0) + 0.(0,0,1,0) + 1.(0,0,0,1). \end{aligned}$$

Construímos então a matriz A, cujas colunas são as coordenadas anteriores, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_3[x] & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\quad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} \quad} & \mathbb{R}^4 \\ \mathcal{B} & & b.c._{\mathbb{R}^4} & & \mathcal{B}' \end{array} \quad .$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} \circ g = g$$

Sabemos então que $B = PA$ com $P = \mathcal{M}(id_{\mathbb{R}^4}; b.c._{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B})$.

Calculemos a matriz P:

$$\begin{aligned} (1,0,0,0) &= 0.(1,1,1,1) + 0.(1,1,1,0) + 0.(1,1,0,0) + 1.(1,0,0,0), \\ (0,1,0,0) &= \alpha_1(1,1,1,1) + \alpha_2(1,1,1,0) + \alpha_3(1,1,0,0) + \alpha_4(1,0,0,0) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1), \end{aligned}$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Assim temos $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1$.

Temos também

$(0,0,1,0) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1),$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Assim $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 0$.

Temos ainda

$(0,0,0,1) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Donde $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$.

Então $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Encontremos as coordenadas do polinómio $2x^2 + 3x$ com respeito à base $\mathcal{B}$:

$2x^2 + 3x = 0.x^3 + 2.x^2 + 3.x + 0.1$

Fazemos o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$g(2x^2 + 3x) = 3.(1, 1, 1, 1) + 0.(1, 1, 1, 0) + (-1).(1, 1, 0, 0) + 0.(1, 0, 0, 0) = (2, 2, 3, 3).$

8. (a) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Com o propósito de determinar os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas vamos exprimir o polinómio característico de A como produto de polinómios do primeiro grau. Com efeito, fazendo uso do teorema de Laplace (segunda linha), obtemos

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 4 & 4 \\ 0 & -4-x & 0 \\ 1 & 2 & -2-x \end{vmatrix} = -(x+4) \begin{vmatrix} -2-x & 4 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = -(x+4)[(x+2)^2-4] = -x(x+4)^2.$$

Assim se conclui que os valores próprios de A são: 0, com multiplicidade algébrica 1, e -4, com multiplicidade algébrica 2.

(b) Tendo presente que a multiplicidade geométrica de um valor próprio é, por definição, a dimensão do respectivo subespaço próprio; vamos determinar uma base para cada um dos subespaços próprios.

O subespaço próprio associado ao valor próprio 0, denotado por M_0, é o seguinte subespaço de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : (A - 0I_3)X = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AX = 0\}.$$

Neste caso, tudo se resume a estudar o sistema homogéneo cuja matriz simples é A.

Usando transformações elementares sobre linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 4\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 + 2\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do exposto resulta que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_0$ se, e só se, $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Assim temos que $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_0. Donde se conclui que o valor próprio 0 tem multiplicidade geométrica 1.

O subespaço próprio associado ao valor próprio -4, denotado por M_{-4} é o seguinte subespaço de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$M_{-4} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : (A + 4I_3)X = 0\}.$$

Neste caso, temos de estudar o sistema homogéneo cuja matriz simples é $A + 4I_3$.

Usando transformações elementares sobre linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das observações anteriores conclui-se que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in M_{-4}$ se, e só se, $x + 2y + 2z = 0$. Portanto $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_{-4}. Donde se conclui que o valor próprio -4 tem multiplicidade geométrica 2.

(c) A matriz A é diagonalizável porque $mg(0) + mg(-4) = 3$.

A matriz A não é invertível porque, de acordo com o que acima foi observado, o sistema homogéneo $AX = 0$ é indeterminado.

9. (a) Vejamos que f é linear.

Sejam $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, arbitrários.

Tem-se

$$\begin{aligned} g((a,b) + (a',b')) &= g(a + a', b + b') = ((a + a') + (b + b'), f(a + a')) \\ &= ((a + b) + (a' + b'), f(a) + f(a')) = (a + b, f(a)) + (a' + b', f(a')) \\ &= g(a,b) + g(a',b'), \end{aligned}$$

usando o facto de que f é linear e portanto $f(a + a') = f(a) + f(a')$.

Por outro lado,

$g(\alpha(a,b)) = g(\alpha a, \alpha b) = (\alpha a + \alpha b, f(\alpha a)) = (\alpha(a + b), f(\alpha a)) = (\alpha(a + b), \alpha f(a)) = \alpha g(a,b)$,

dado que f sendo linear se verifica $f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

(b) Uma vez que que f é injectiva sabemos que $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Para provar que g é injectiva, como se trata de uma aplicação linear, basta ver que $\mathrm{Nuc} g = \{(0,0)\}$. Ora

$$\begin{aligned} (a,b) \in \mathrm{Nuc}\, g &\Leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } g(a,b) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } (a + b, f(a)) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } a + b = 0 \text{ e } f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = -a \text{ e } a = 0 \\ &\Leftrightarrow (a,b) = (0,0). \end{aligned}$$

(c) Dado que g é injectiva e a dimensão do espaço de partida é igual à dimensão do espaço de chegada, concluímos que g é também sobrejectiva. Assim temos que g é bijectiva. Por outro lado, pela alínea a), sabemos que g é linear. Assim se conclui que g é um isomorfismo, uma vez que é uma aplicação linear bijectiva.