1. C.
2. B.
3. C.
4. D.
5. C.
6. B.

7. (a) Temos $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Podemos considerar as transformações $T_1 = l_3 - 2l_1$ e $T_2 = \frac{1}{3}l_2$.

8. (a) Temos $\begin{vmatrix} 2 & \beta & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} \beta(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} -\beta(-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\beta(4 + 2\beta)$.

(b) Sabemos que uma matriz B é invertível se, e só se, o seu determinante é diferente de zero. Assim, atendendo à alínea anterior, B é invertível se, e só se, $-\beta(4 + 2\beta) \neq 0$, ou seja se, e só se, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

9. (a) Temos

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, as matrizes não nulas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A cujos valores próprios correspondentes são 3, -1 e -1 . Podemos concluir que A tem pelo menos dois valores próprios e como A tem ordem 3 terá no máximo 3.

Observemos que os vectores próprios $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes. De facto, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então $\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Assim, pelo critério de independência linear, concluímos que os vectores são linearmente independentes.

Como a matriz A , de ordem 3, tem 3 vectores linearmente independentes podemos concluir que A é diagonalizável.

(b) Sendo A uma matriz diagonalizável, então A é semelhante a uma matriz diagonal da forma $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

sendo uma matriz diagonalizante a matriz $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde cada coluna apresenta um vector próprio associado ao valor próprio na coluna de D correspondente. Assim, tem-se $P^{-1}AP = D$.

10. (a) Ora $A[-(A - 2I_n)] = -[A(A - 2I_n)] = -(A^2 - 2A) = -(-I_n) = I_n$, logo A é invertível. Também, $-A(A - 2I_n) = -(A^2 - 2A) = -(-I_n) = I_n$, donde $A - 2I_n$ é invertível.

(b) Seja α um valor próprio de A e consideremos o polinómio $p(x) = x^2 - 2x + 1$. Sabemos que então $p(\alpha)$ é valor próprio de $p(A)$, ou seja, $\alpha^2 - 2\alpha + 1$ é valor próprio da matriz $A^2 - 2A + I_n$. Mas, como $A^2 - 2A = -I_n$ então $A^2 - 2A + I_n = 0_n$. Ora, a matriz nula tem um único valor próprio que é 0. Sendo $\alpha^2 - 2\alpha + 1$ um valor próprio de $A^2 - 2A + I_n = 0_n$ então $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$.

(c) Suponhamos que A é diagonalizável e seja α um valor próprio de A . Pela alínea anterior, $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Portanto, A tem um único valor próprio que é o 1 e A é semelhante a uma matriz diagonal que tem na diagonal o valor 1, isto é, A é semelhante à matriz identidade. Por outras palavras, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = I_n$. Logo, $A = PP^{-1} = I_n$, como queríamos demonstrar.