PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e trinta minutos de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração do Exame: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é invertível então $|2P^T P^{-1}| = 2^3$.
- B Se $P, Q, R \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis então PQR é invertível e $(PQR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$.
- C Se $P, Q, R \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com P invertível, verificam $PQ = PR$ então $Q = R$.
- D Para quaisquer matrizes $P, Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tem-se $(P + Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2$.

Continua no verso desta folha

2. Em $\mathbb{R}^3$ consideremos o referencial canónico. Sejam $\mathcal{R}$ a recta com equação vectorial

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0) + \alpha(2, 1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

e $\mathcal{P}$ o plano definido pelos pontos $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$ e $(2, 0, 3)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $x - 2y - z + 1 = 0$ é uma equação geral do plano $\mathcal{P}$.
- B $\begin{cases} x - 2z = -1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ é uma representação cartesiana da recta $\mathcal{R}$.
- C O ponto $(3, 1, 2)$ é um ponto comum à recta $\mathcal{R}$ e ao plano $\mathcal{P}$.
- D O ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao plano $\mathcal{P}$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (a - 3c, b - 2c, b - 2c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $\text{Im } f = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1), (-3, -2, -2) \rangle$.
- B f não é sobrejectiva.
- C f é injectiva.
- D $(0, 1, 0) \notin \text{Nuc } f$.

4. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- B $f(1, 1, 1) = (2, 1, 2)$.
- C $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
- D $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

5. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $H \in \mathcal{M}_{3 \times 7}(\mathbb{R})$ então as matrizes H e $PQRH$ têm a mesma característica.
- B $QR = RQ$.
- C P , Q e R são matrizes elementares.
- D $|PQR| = -3$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + \alpha y + 2z = 3 \\ x + 2y + \beta z = \alpha \end{cases} .$$

[2.5] (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β .

[1.5] (b) Determine o conjunto das soluções do sistema quando $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Mude de Folha

[2.0] 7. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

e indique, justificando, se A é invertível.

Mude de Folha

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b) = (a + b, 2a + b, 3a + b),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

[1.5] (a) Determine o núcleo de f . Indique, justificando, se f é injectiva.

[1.5] (b) Determine uma base da imagem de f .

[1.0] (c) Determine, caso existam, os valores de k para os quais $(2, k, 3k)$ pertence à imagem de f .

Mude de Folha

9. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com $n > 1$, uma matriz invertível e λ valor próprio de A . Prove que:

[1.5] (a) $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1} .

[1.0] (b) $\frac{|A|}{\lambda}$ é valor próprio de $\text{adj } A$.

Fim

1. D
2. D
3. C
4. A
5. B
6. (a) O sistema dado pode ser escrito na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B.$$

Efectuando na matriz ampliada do sistema, $[A|B]$, transformações elementares sobre linhas, vamos obter uma matriz $[A'|B']$ a partir da qual poderemos fazer a discussão do sistema. Assim

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \beta & \alpha \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + (-1)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha - 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & \alpha - 2 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Tendo em conta a matriz $[A'|B']$ concluímos que:

- Se $\alpha \neq 2$ e $\beta \neq 1$ então $r(A) = r([A|B]) =$ número de incógnitas $= 3$.
Logo, neste caso, o sistema é possível e determinado.
- Se $\alpha \neq 2$ e $\beta = 1$ então $r(A) = 2 < r([A|B]) = 3$.
Logo, neste caso, o sistema é impossível.
- Se $\alpha = 2$ e $\beta \neq 1$ temos

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-\beta + 1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta + 1 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.})$$

donde se conclui que $r(A) = 2 < r([A|B]) = 3$.

Logo, neste caso, o sistema é impossível.

- Se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ então $r(A) = r([A|B]) = 2 <$ número de incógnitas $= 3$.
Logo, neste caso, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $1 =$ número de incógnitas $- r(A)$.

- (b) Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ a matriz $[A'|B']$, obtida na alínea anterior, toma a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

Partindo desta matriz, efectuando transformações elementares sobre linhas, determinemos uma matriz em forma de escada reduzida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A''|B''] \quad (\text{f.e.r.}).$$

A matriz $[A''|B'']$ está na forma de escada reduzida. Assim, o conjunto de soluções do sistema, relativamente ao caso pedido, é

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 1 - 2b \wedge c = 1\} = \{(1 - 2b, b, 1) : b \in \mathbb{R}\}.$$

7. Calculemos $|A|$ a partir do determinante de uma matriz A' , obtida a partir de A , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A|$ com $|A'|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A' seja triangular. Por exemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{l_2+(-1)l_1} \\ \xrightarrow{l_3+(-1)l_1} \\ \xrightarrow{l_4+(-2)l_1} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 4.$$

Como $|A| \neq 0$ concluímos que A é invertível.

■ Alternativamente, podíamos utilizar apenas o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante de A . Tem-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{l_2} \\ \xrightarrow{l_3} \\ \xrightarrow{l_4} \end{matrix} 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{matrix} \xrightarrow{l_1} \\ \xrightarrow{l_2} \\ \xrightarrow{l_3} \end{matrix} 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (24 - 16) - 2 \times (6 - 8) + 2 \times (4 - 8) = 8 + 4 - 8 = 4. \end{aligned}$$

■

8. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : f(a, b) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a + b, 2a + b, 3a + b) = (0, 0, 0)\} \\ &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{a + b = 0 \wedge 2a + b = 0 \wedge 3a + b = 0}_{\text{Sistema } AX = 0, \text{ nas incógnitas } a, b, \text{ a resolver.}} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-3)l_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3+(-2)l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1+(-1)l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Então,

$$\text{Nuc } f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0 \wedge b = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Como uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo é constituído apenas pelo vector nulo, concluímos que f é injectiva.

- (b) Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{f(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a + b, 2a + b, 3a + b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, 2a, 3a) + (b, b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

A sequência $((1, 2, 3), (1, 1, 1))$ é uma base de $\text{Im } f$ porque gera $\text{Im } f$ e é linearmente independente (basta ver que $\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).

(c) O vector $(2, k, 3k)$ pertence à imagem de f se, e só se, existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b) = (2, k, 3k)$.

Como

$$f(a, b) = (2, k, 3k) \Leftrightarrow (a + b, 2a + b, 3a + b) = (2, k, 3k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = k \\ 3a + b = 3k \end{cases}$$

(sistema $AX = B$ de equações lineares, nas incógnitas a, b , sobre $\mathbb{R}$),

resulta que $(2, k, 3k) \in \text{Im } f$ se, e só se, o sistema $AX = B$ é possível.

Atendendo a que

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ 3 & 1 & 3k \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-3)l_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-4 \\ 0 & -2 & 3k-6 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-2)l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-4 \\ 0 & 0 & k+2 \end{array} \right],$$

concluimos que o sistema $AX = B$ é possível se, e só se, $r(A) = r([A|B])$, isto é, se, e só se, $k = -2$.

9. (a) Sabemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$. Como A é invertível tem-se $|A| = |A - 0I_n| \neq 0$. Logo 0 não é valor próprio de A e, portanto, $\lambda \neq 0$.

Vejam agora que $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1} . Seja X um vector próprio de A associado ao valor próprio λ . Tem-se $\lambda \neq 0$, $X \neq 0_{n \times 1}$ e $AX = \lambda X$. Como

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = \lambda(A^{-1}X) \\ &\Leftrightarrow I_n X = \lambda(A^{-1}X) \\ &\Leftrightarrow X = \lambda(A^{-1}X) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X \end{aligned}$$

concluimos que $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1} (e X é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $\frac{1}{\lambda}$).

(b) Como A é invertível tem-se $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$ donde resulta que

$$\text{adj } A = |A|A^{-1}.$$

Seja X um vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio $\frac{1}{\lambda}$. Tem-se $\lambda \neq 0$, $X \neq 0_{n \times 1}$ e $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$. Como

$$\begin{aligned} \text{adj } A = |A|A^{-1} &\Rightarrow (\text{adj } A)X = |A|A^{-1}X \\ &\Rightarrow (\text{adj } A)X = |A|\frac{1}{\lambda}X \\ &\Rightarrow (\text{adj } A)X = \frac{|A|}{\lambda}X \end{aligned}$$

concluimos que $\frac{|A|}{\lambda}$ é valor próprio de $\text{adj } A$ (e X é vector próprio de $\text{adj } A$ associado ao valor próprio $\frac{|A|}{\lambda}$).