FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Primeiro Teste – 03 de Dezembro de 2008

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}),\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A É possível efectuar $BA + C^\top$ e a matriz obtida é do tipo 2×3.

B $B(CB + A) = BCB + BA = B(BC + A)$.

C A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

D $A + A^\top$ é uma matriz simétrica.

Continua no verso desta folha

2. Considere as matrizes, equivalentes por linhas,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -a & -b \\ 4 & 0 & 2b \\ 2a & -a^2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & -a & -b \\ 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & 2+ab \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $A' \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

$\boxed{\text{B}}$ Se $a \neq 0$, A' está em forma de escada.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a = 0$ e $b \neq 0$ a matriz A é invertível.

$\boxed{\text{D}}$ $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha = 2$, $\mathrm{r}(A) = 2$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = 1$, $\mathrm{r}(A) = 3$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = -3$, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz em forma de escada reduzida, equivalente por linhas, à matriz A.

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é, para qualquer valor de α, uma matriz em forma de escada, equivalente por linhas à matriz A.

4. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + ay + bz = 1 \\ a(b-1)y = a \\ x + ay + z = b^2 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $a \neq 0$ é $b \neq 1$ o sistema é um sistema de Cramer.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a = 0$ e $b = 1$ então a característica das matrizes simples e ampliada do sistema são iguais a 1 e, portanto, o sistema é possível, indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{C}}$ Para $a = 2$ e $b = 2$, $(5, 1, -3)$ é solução do sistema.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a \neq 0$ e $b = 1$ o sistema é possível, indeterminado com grau de indeterminação 1.

5. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$.

Considere que $\det A = 3$, $\det B = 0$ e $\det C = \frac{1}{3}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\det(AC) = \det I_7$.

$\boxed{\text{B}}$ AB é invertível.

$\boxed{\text{C}}$ $\det(3C) = 3^4$.

$\boxed{\text{D}}$ $\det(A^3C^2) = \det A$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Primeiro Teste – 03 de Dezembro de 2008

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

[1.5] (a) Indique a matriz em forma de escada reduzida, equivalente por linhas à matriz A.

[1.0] (b) Justifique, por dois processos distintos, que a matriz A é invertível.

[1.0] (c) Determine $\widehat{A}_{23}$ e $(\operatorname{adj} A)_{31}$ e indique a matriz $A \operatorname{adj} A$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, e para cada $k \in \mathbb{R}$, a matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 3 & 5-k & 4 \\ 7 & 5 & 4-k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Determine, justificando, para que valores de k a matriz B_k é invertível.

[1.0] (b) Para $k = 9$, indique $\mathrm{r}(B_k)$. Utilize o resultado obtido para verificar se, para este valor de k, o sistema $B_k X = 0$ tem uma única solução. Justifique.

[1.5] (c) Para $k = 0$, verifique que $(0, -4, 5)$ é solução do sistema $B_k X = 0$, indicando mais duas soluções deste sistema, distintas da dada.

Mude de Folha

8. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \\ -y - z = -1 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Justifique que o sistema dado é um sistema de Cramer e resolva-o utilizando a regra de Cramer.

[0.5] (b) Sendo A a matriz simples do sistema dado e B a matriz dos termos independentes indique, sem calcular A^{-1}, a matriz $A^{-1}B$.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$. Prove que:

[1.0] (a) $(\operatorname{adj} A)^\top = \operatorname{adj}(A^\top)$.

[1.0] (b) Se A é simétrica então $\operatorname{adj} A$ é simétrica.

[1.0] (c) Pode ter-se $\operatorname{adj} A$ simétrica e A não ser simétrica.

Sugestão: Considere $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ com apenas uma entrada não nula numa posição (i, j), com $i \neq j$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Uma resolução com notas explicativas

1. B

2. C

3. D

4. D

5. B

6. (a) Efectuando transformações elementares nas linhas da matriz A obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}l_2 \\ -l_3}]{} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + l_3]{} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 + 2l_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Assim, a matriz em forma de escada reduzida, equivalente por linhas à matriz A é I_3.

(b) Vimos na alínea anterior que $\mathrm{r}(A) = 3$. Como A é uma matriz quadrada de ordem 3, então A é invertível.

Por outro lado, vimos também, na alínea anterior, que a matriz I_3 é a matriz em forma de escada reduzida, equivalente por linhas à matriz A, o que nos permite, também, concluir que A é invertível.

<u>Outra justificação alternativa</u>

Uma matriz é invertível se o seu determinante é não nulo. Calculando o determinante da matriz A obtemos:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_1}{=}} 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18 + 12 = -6 \neq 0$, logo A é invertível.

(c) Sabemos que $\widehat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Por outro lado $(\operatorname{adj} A)_{31} = \widehat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det A(1|3) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6$.

Assim, temos $\widehat{A}_{23} = 0$ e $(\operatorname{adj} A)_{31} = -6$.

Temos $A \operatorname{adj} A = (\det A) I_3$, portanto, como na alínea anterior vimos que $\det A = -6$, podemos afirmar que

$$A \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Uma matriz é invertível se o seu determinante for não nulo. Calculemos o determinante da matriz B_k:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 3 & 5-k & 4 \\ 7 & 5 & 4-k \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_1}{=}} (1-k)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 5 & 4-k \end{vmatrix} =$$

$$= (1-k)((5-k)(4-k)-20) = (1-k)(20-4k-5k+k^2-20)$$
$$= (1-k)(k^2-9k) = (1-k)k(k-9).$$

Assim, $\det B_k = 0$ se, e só se, $(1-k)k(k-9) = 0$ isto é se $k = 1$ ou $k = 0$ ou $k = 9$.

Podemos então afirmar que B_k é invertível se

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 9\}.$$

(b) Para $k = 9$, como vimos na alínea anterior, $\det B_k = 0$, logo $\mathrm{r}(B_k) < 3$. A característica de B_k é dada pelo número de linhas não nulas da matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz B_k.

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$B_9 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8}l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 7 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2-3l_1 \\ l_3-7l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+\frac{5}{4}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Logo a característica de B_9 é 2.

Como o número de incógnitas do sistema $B_9X = 0$ é 3, o sistema considerado é indeterminado não tendo, por isso, uma única solução.

(c) Para $k = 0$ a matriz B_k é a matriz $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

$(0, -4, 5)$ é solução do sistema $B_0X = 0$ se, e só se,

$$B_0 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

concluimos que $(0, -4, 5)$ é solução do sistema.

Para encontrar as outras soluções pedidas, resolvamos o sistema utilizando a sua matriz ampliada:

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2-3l_1 \\ l_3-7l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3-l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{5}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + \frac{4}{5}z = 0 \end{cases}.$$

desta forma o conjunto das soluções do sistema é

$C.S. = \{(0, \frac{4}{5}\alpha_3, \alpha_3) : \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.

Para cada valor de α_3 obtemos soluções distintas do sistema. Deste modo duas novas soluções, para além da dada, são, por exemplo, $(0, 0, 0)$ (para $\alpha_3 = 0$) e $(0, 8, 10)$ (para $\alpha_3 = 10$).

8. (a) O sistema é um sistema de Cramer se a matriz simples do sistema for quadrada e invertível.

A matriz simples do sistema dado é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que esta matriz é quadrada, calculemos o seu determinante para averiguar se tal matriz é invertível:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{l_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0,$$

logo A é invertível. Podemos então afirmar que o sistema dado é um sistema de Cramer.

Pela Regra de Cramer a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ do sistema é dada por

$\alpha_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det A}$, como as colunas 1 e 3 da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ são iguais, o seu determinante é zero. Assim, $\alpha_1 = \frac{0}{\det A} = 0$.

$\alpha_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det A}$, como as colunas 2 e 3 da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ são iguais, o seu determinante é zero. Assim, $\alpha_2 = \frac{0}{\det A} = 0$.

$\alpha_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\det A}$, como a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz A, temos $\alpha_3 = \frac{\det A}{\det A} = 1$.

Desta forma temos que a solução do sistema é $(0, 0, 1)$.

(b) Considerando $AX = B$, a forma matricial do sistema dado, temos:

$AX = B \Leftrightarrow$
$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow$
$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow$
$I_3X = A^{-1}B \Leftrightarrow$
$X = A^{-1}B.$

Como $(0, 0, 1)$ é a única solução do sistema então $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, por conseguinte,

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. (a) Sabemos que duas matrizes são iguais se são do mesmo tipo e os elementos homólogos são iguais. Dado que A é uma matriz quadrada de ordem n conclui-se de forma imediata que $(\operatorname{adj} A)^\top$ e $\operatorname{adj}(A^\top)$ são também quadradas de ordem n.

Resta então provar que os elementos homólogos destas matrizes são iguais. Temos:

$$((\operatorname{adj} A)^\top)_{ij} = (\operatorname{adj} A)_{ji} = \widehat{A}_{ij}.$$

Observemos que $\det A(i|j) = \det A^\top(j|i)$ e que, portanto, $\widehat{A}_{ij} = (\widehat{A^\top})_{ji}$.

Assim,

$$((\operatorname{adj} A)^\top)_{ij} = \widehat{A}_{ij} = (\widehat{A^\top})_{ji} = (\operatorname{adj}(A^\top))_{ij}$$

o que nos permite concluir a igualdade pretendida.

(b) Uma matriz M é simétrica se $M = M^\top$. Seja A uma matriz simétrica, queremos provar que $\operatorname{adj} A$ é simétrica, isto é, que $(\operatorname{adj} A)^\top = \operatorname{adj} A$.

Pela alínea anterior temos $(\operatorname{adj} A)^\top = \operatorname{adj}(A^\top)$ mas, como A é simétrica, $A^\top = A$, então

$$(\operatorname{adj} A)^\top = \operatorname{adj}(A^\top) = \operatorname{adj} A.$$

Logo $\operatorname{adj} A$ é simétrica.

(c) Consideremos, como sugerido, uma matriz A quadrada de ordem 3 com todos os elementos nulos, exceptuando um que não pertence à diagonal principal ($i \neq j$). Por exemplo tomemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como podemos observar facilmente, A não é simétrica pois $A^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A$, no entanto como a matriz $A(i|j)$ tem sempre uma linha nula para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, podemos afirmar que

$$\widehat{A}_{ij} = 0, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

e, consequentemente, a matriz $\operatorname{adj} A$ é a matriz nula que é uma matriz simétrica.