

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				X
2.			X	
3.		X		
4.		X		
5.		X		
6.			X	

Atenção

Os primeiros 6 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 6 grupos apenas uma das afirmações é **FALSA**. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 6) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 6 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 horas.

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O elemento da posição (2, 3) da matriz AB é 5.
- ☐ B A matriz B está em forma de escada reduzida mas a matriz que se obtém de B trocando a coluna 3 com a coluna 4 não está nessa forma.
- ☐ C A é invertível e a sua forma de escada reduzida é I_3 .
- ☐ D Não existe nenhuma matriz elementar E tal que a matriz EA esteja em forma de escada.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A tem característica 3.
☐ B B^T tem característica 2.
☐ C $B + C$ tem característica 2.
☐ D Se $B \xrightarrow{\alpha I_1} B_1 \xrightarrow{\beta I_2} B_2$ então, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, B_2 tem característica 2.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ \alpha(\beta - 1)y = \alpha \\ x + \alpha y + z = \beta^2 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é possível determinado.
☐ B Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.
☐ C Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.
☐ D Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1$ então o sistema é impossível.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det A = 8$.
☐ B $\hat{A}_{23} = 4$.
☐ C $\hat{A}_{22} = 4$.
☐ D $A \cdot \text{adj}(A) = 8I_3$.

5. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = \alpha$ e $\det B = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A AB é invertível e $\det((AB)^{-1}) = \frac{1}{\alpha\beta}$.
☐ B B é invertível e $\det(2AB^{-1}) = 2\frac{\alpha}{\beta}$.
☐ C $\det(2A^3) + \det(-B) = 8\alpha^3 - \beta$.
☐ D Se $A \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} A_1 \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} A_2$ então $\det A_2 = -\alpha$.

6. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A No espaço vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ o oposto, para a adição, de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
☐ B No espaço vectorial $\mathcal{M}_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ o elemento neutro da adição é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
☐ C O conjunto das matrizes invertíveis de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
☐ D $\mathbb{R}$, com as operações usuais da adição e da multiplicação, não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ mas $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

7. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ e $A \xrightarrow{2l_1} B \xrightarrow{l_3+4l_1} C$. Indique matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que :

[0.5] (a) $B = E_1 A$;

[0.5] (b) $C = E_2 E_3 A$;

[0.5] (c) $A = E_4 B$.

Mude de Folha

[0.5] 8. (a) Defina matrizes equivalentes por linhas.

[1.0] (b) Indique uma condição necessária e suficiente para duas matrizes de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ serem equivalentes por linhas.

[0.5] (c) Utilizando (b) determine se as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 0_{n \times n}$. Mostre que

[1.0] (a) A não é invertível.

[1.5] (b) O sistema homogêneo $AX = 0$ é possível indeterminado.

Mude de Folha

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 2A$. Mostre que:

[1.5] (a) $\det A \in \{0, 2^n\}$.

[1.5] (b) Se A é invertível então $A^{-1} = \frac{1}{2}I_n$.

Mude de Folha

[2.0] 11. Demonstre que se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A é igual a um produto de matrizes elementares.

Fim