FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Primeiro Teste – 14 de Novembro de 2008

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:________________________________

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times5}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times4}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $PQ \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ e a entrada $(3,4)$ de PQ é igual a 1.

$\boxed{\text{B}}$ $PQ \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ e a entrada $(2,3)$ de PQ é igual a 9.

$\boxed{\text{C}}$ $(PQ)^\top \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$ e a entrada $(2,3)$ de $(PQ)^\top$ é igual a 4.

$\boxed{\text{D}}$ $Q^\top P^\top \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$ e a entrada $(2,3)$ de $Q^\top P^\top$ é igual a 3.

Continua no verso desta folha

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + (\alpha+1)y + 2z = 3 \\ x + (\alpha+1)y + \beta z = \alpha + 3 \end{cases}.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\beta \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ então o sistema é possível e determinado.

B Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

C Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(2-\lambda,\, 1-\lambda,\, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

D Se $\alpha = -1$ então o sistema só é possível para $\beta = 1$ e, nesse caso, é indeterminado com grau de indeterminação 1.

3. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $P, Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$.

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se P e Q são invertíveis então P e Q são equivalentes por linhas.

B Se P é invertível então $\mathrm{r}(PA) = \mathrm{r}(A)$.

C Se P e Q comutam o mesmo sucede a $P^\top$ e $Q^\top$.

D Existe P simétrica e invertível tal que P^{-1} não é simétrica.

4. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se Q é invertível então Q_3 pode não ser invertível.

B Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C Se $Q_3 = I_2$ então $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

D $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q$.

5. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\mathrm{r}(P) = \mathrm{r}(Q) = \mathrm{r}(H)$.

B P e Q são equivalentes por linhas.

C Q e H são equivalentes por linhas.

D P está em forma de escada reduzida.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Primeiro Teste – 14 de Novembro de 2008

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 9}(\mathbb{R})$. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas à esquerda por A, produzem em A cada uma das seguintes transformações:

[0.5] (a) Troca da primeira linha com a terceira linha.

[0.5] (b) Multiplicação da primeira linha por 6.

[0.5] (c) Adição de $\frac{1}{5}$ da segunda linha à terceira linha.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[2.0] (a) Justifique que A é invertível e determine A^{-1}.

[2.0] (b) Determine 3 matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que

$$A^{-1} = E_3E_2E_1.$$

[1.5] (c) Determine 3 matrizes elementares G_1, G_2, G_3 tais que

$$A = G_3G_2G_1.$$

Mude de Folha

[2.0] **8.** Determine o conjunto dos valores de α e o conjunto dos valores de β, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

Mude de Folha

[2.0] **9.** Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Prove que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Primeiro Teste – 14 de Novembro de 2008

Uma resolução com notas explicativas

1. D

2. C

3. D

4. A

5. C

6. Como sabemos, se $A \in \mathcal{M}_{3\times 9}(\mathbb{R})$ e $A \xrightarrow[T]{} B$, sendo T uma transformação elementar sobre as linhas de A, então $B = EA$, onde $E \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz elementar, sobre linhas, associada à transformação elementar T, isto é, $I_3 \xrightarrow[T]{} E$. Assim:

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (pois $I_3 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$).

(b) $E = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (pois $I_3 \xrightarrow[6l_1]{} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$ (pois $I_3 \xrightarrow[l_3 + \frac{1}{5} l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$).

7. (a) Como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\mathrm{r}(A) = 3 =$ ordem de A. Logo A é uma matriz invertível.

Abreviadamente, vamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid A^{-1}]$.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + (-2)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + (-1)l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1 + (-1)l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Como sabemos, a forma de escada reduzida de uma matriz invertível é a identidade. Equivalentemente, toda a matriz invertível pode ser escrita como produto de matrizes elementares. Em particular, a matriz invertível A^{-1} poderá ser escrita como

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1,$$

em que E_1, E_2 e E_3 são matrizes elementares se, e só se, for possível obter A^{-1} a partir de I_3 (a forma de escada reduzida de A^{-1}), efectuando apenas 3 transformações elementares sobre linhas. Pela resolução da alínea anterior, vimos que

$$I_3 \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} B_1 \xrightarrow[l_2+(-1)l_3]{} B_2 \xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{} B_3 = A^{-1}.$$

Atendendo ao efeito da multiplicação de uma matriz elementar, à esquerda, por uma matriz do tipo adequado, temos que

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1,$$

sendo E_1, E_2 e E_3 as matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ associadas, respectivamente, às transformações elementares $l_3 + (-2)l_1$, $l_2 + (-1)l_3$ e $l_1 + (-1)l_3$, isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Dado que A é invertível e $A^{-1} = E_3 E_2 E_1$, resulta que

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = (E_3 E_2 E_1)^{-1} = {E_1}^{-1} {E_2}^{-1} {E_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a inversa de cada matriz elementar é ainda uma matriz elementar, acabamos de exprimir a matriz A como produto de 3 matrizes elementares.

8. A matriz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível se, e só se, $\mathrm{r}(H) = 3 =$ ordem de H. Como

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-2 \end{bmatrix}$$

concluímos que $\mathrm{r}(H) = 3$ se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

9. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Vamos provar que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

- Como $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ resulta que $(AB)^\top \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
  Dado que $B^\top \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e $A^\top \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ vem que $B^\top A^\top \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
  Então $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
- Vejamos que os elementos homólogos de $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ são iguais, isto é, que

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij},\ i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, m.$$

  Tem-se

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^\top\right)_{ik} \left(A^\top\right)_{kj} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij}.$$

Logo

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$