Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segundo Teste – 14 de Janeiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Atenção

Os primeiros 6 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 6 grupos apenas uma das afirmações é FALSA. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 6) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 6 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 2 horas.**

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2d \ \wedge \ b = c = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 1.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^8$.

$\boxed{\text{C}}$ $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dim \mathbb{R}_2[x] = 2$, sendo $\mathbb{R}_2[x]$ o espaço vectorial de todos os polinómios na variável x, com coeficientes reais, de grau inferior ou igual a 2.

2. Seja $\mathcal{S} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se algum dos vectores de $\mathcal{S}$ é 0_E então S é uma sequência linearmente dependente.

$\boxed{\text{B}}$ Se $u_3 = 2u_1 - 3u_2 + u_4$ então $\mathcal{S}$ é uma sequência linearmente dependente.

$\boxed{\text{C}}$ $< u_1, u_2, u_3, u_4 > \neq < u_1 + u_2, u_2, -2u_3, u_3 - u_4 >$.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{S} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ é linearmente independente se, e só se, $\mathcal{S}' = (u_1 + u_2, u_2, -2u_3, u_3 - u_4)$ é linearmente independente.

Continua no verso desta folha

3. Considere as aplicações $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(a,b,c) = (2a, b-c, a-1)$, para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, e $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(a,b,c) = (a-b, c, 2c)$, para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Considere, em $\mathbb{R}^3$, a base $\mathcal{B} = ((0,1,0),(-1,0,0),(0,0,2))$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] f não é uma aplicação linear.

[B] g é uma aplicação linear e $\dim Nuc\ g = 1$.

[C] g é uma aplicação linear e $\mathcal{M}(g; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

[D] g é uma aplicação linear e $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A.

[B] O polinómio característico de A é $p(x) = (2-x)(-1-x)^2$.

[C] $|A - 2I_3| = 0$ e $|A - (-1)I_3| = 0$.

[D] -1 é valor próprio de A e o subespaço próprio que lhe está associado é $M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = -b \right\}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada anteriormente. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] A é diagonalizável.

[B] Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável então o mesmo sucede a αB, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

[C] Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável então o mesmo sucede a B^T.

[D] Se $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são semelhantes então têm o mesmo polinómio característico.

6. Seja $(O; e_1, e_2, e_3)$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos $A = (-1,0,4)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (-1,3,1)$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Os pontos A, B e C definem um triângulo cuja área é $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

[B] O ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\frac{\pi}{3}$.

[C] O vector $w = e_1 + 5e_2 - e_3$ é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB}$.

[D] O triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C é equilátero.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

7. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\}$$

e

$$G = \langle (1,-1,2), (0,1,1), (2,-1,5) \rangle.$$

[1.0] (a) Determine uma base de F e uma base de G.

[1.0] (b) Determine uma base de $F + G$.

[1.0] (c) Indique as dimensões de F, G, $F + G$ e $F \cap G$.

Mude de Folha

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = \begin{bmatrix} 2a & b-c \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

[1.0] (a) Mostre que $Nuc\ f = \{(0,c,c) : c \in \mathbb{R}\}$.

[1.0] (b) Determine $\dim Nuc\ f$ e $\dim Im\ f$.

[1.0] (c) Indique se f é injectiva e se f é sobrejectiva.

Mude de Folha

9. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ é tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.

[1.5] (b) Sem efectuar cálculos, conclua que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 4I_n$. Mostre que:

[1.5] (a) Se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{-2, 2\}$.

[1.0] (b) $|A - 4I_n| \neq 0$.

Fim