FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 14 de Janeiro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Seja $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear e sejam $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = ((0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1))$ bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

Seja $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $r(A) = 3$, logo f não é sobrejectiva.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = (-1, 0, 0, 1)$.

$\boxed{\text{D}}$ $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (1, 1, 0, 0)$.

Continua no verso desta folha

2. Sejam F, G e H subespaços de $\mathbb{R}_5[x]$, tais que dim $F = 2$, dim $G = 4$ e dim $H = 5$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\dim(G + H) = 5$ ou $\dim(G + H) = 6$.

B $\dim(F \cap H) = 0$.

C Se $\dim(F + G) = 6$ então $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_5[x]}\}$.

D Se $\dim(F \cap G) = 2$ então $\dim(F + G) = \dim G$.

3. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b \text{ e } c = 0\}$ e $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A F e G são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

B $((2, 1, 0))$ é uma base de F.

C dim $G = 1$.

D $F \cup G$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ pois $F \subseteq G$.

4. Seja $f : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$ uma aplicação linear.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A dim Nuc$f \leq 5$.

B dim Imf+dim Nuc$f = 5$.

C Se dim Nuc$f = 0$ então f é sobrejectiva

D dim Im $f \neq$dim $\mathcal{M}_{2\times4}(\mathbb{R})$.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 3.

B $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo 5 é valor próprio de A.

C $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo -3 é valor próprio de A.

D $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 3 e portanto, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A^3 associado ao valor próprio 27.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Segundo Teste – 14 de Janeiro de 2009

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Sejam $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \text{ e } c = b + d\}$ e $G =< (1,0,1,2),(2,1,0,0),(5,1,3,6) >$, subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$.

[1,5] (a) Indique, justificando, uma base de F e uma base de G.

[1,5] (b) Determine, usando matrizes, a dimensão de $F + G$.

[1,0] (c) Usando o teorema das dimensões indique $\dim(F \cap G)$.

Mude de Folha

7. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear definida por

$$g(a,b,c) = (a+b, b+c), \quad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Sejam $\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ e $\mathcal{B}' = ((0,1)(1,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

[1,5] (a) Determine o Nuc g e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se g é injectiva.

[1,5] (b) Calcule $A = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

[1,0] (c) Justifique que g é sobrejectiva:

i) Usando o Teorema da Dimensão.

ii) Usando a matriz A.

Mude de Folha

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios.

Mude de Folha

9. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A.

[1,0] (a) Prove que $M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\}$ é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

[1,0] (b) Justifique que $\dim M_\alpha \neq 0$.

Fim

1. C

2. B

3. C

4. C

5. B

6. (a) Temos $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b \text{ e } c = b + d\} = \{(2b, b, b+d, d) : b, d \in \mathbb{R}\}$.

Como $(2b,b,b+d,d) = (2b,b,b,0) + (0,0,d,d) = b(2,1,1,0) + d(0,0,1,1)$, podemos afirmar que os vectores $(2,1,1,0)$ e $(0,0,1,1)$ são geradores de F, isto é, $F = \langle (2,1,1,0), (0,0,1,1) \rangle$.

Dado que, estes vectores, são não nulos, e não são múltiplos escalares um do outro podemos concluir ainda que são linearmente independentes.

Assim, uma base para F será

$$((2,1,1,0),(0,0,1,1)).$$

Consideremos agora o subespaço G. Sabemos que $G =< (1,0,1,2),(2,1,0,0),(5,1,3,6) >$, ou seja , já conhecemos um conjunto de geradores de G.

Para verificarmos se este conjunto de geradores é linearmente independente, construamos uma matriz cujas linhas são estes três vectores e, de seguida, levemos esta matriz à forma de escada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-5l_1]{l_2-2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

Como, a matriz em forma de escada tem uma linha nula, sabemos que os vectores correspondentes às linhas não nulas desta matriz constituem uma base de G. Podem ainda ser considerados para base de G os vectores da matriz inicial que correspondem às linhas não nulas da matriz em forma de escada obtida. Assim uma base de G poderá ser

$$((1,0,1,2),(0,1,-2,-4))$$

ou ainda

$$((1,0,1,2),(2,1,0,0)).$$

(b) O subespaço $F + G$ é gerado pela união dos vectores das bases de F e G, isto é,

$$F + G = \langle (2,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,2),(2,1,0,0) \rangle.$$

Considerando a matriz cujas linhas são estes vectores, obtemos a dimensão de $F + G$ calculando a sua característica.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_4]{l_1\leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-2l_1]{l_2-2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3-l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4-l_3]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

Dado que a matriz em forma de escada obtida tem quatro linhas não nulas, a característica da matriz considerada é 4 e, portanto, $\dim(F+G)=4$.

(c) O teorema das dimensões afirma que

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Pela alínea a) sabemos que $\dim F=2$ e que $\dim G=2$, pela alínea b) sabemos que $\dim(F+G)=4$, assim

$$4=2+2-\dim(F\cap G),$$

logo

$$\dim(F\cap G)=0.$$

7. (a) $\operatorname{Nuc} g=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: g(a,b,c)=(0,0)\}$. Como $g(a,b,c)=(0,0)\Leftrightarrow(a+b,b+c)=(0,0)\Leftrightarrow a=-b\wedge c=-b$, tem-se:

$$\operatorname{Nuc} g=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: a=-b\wedge c=-b\}=\{(-b,b,-b): b\in\mathbb{R}\}$$

Como $(-b,b,-b)=b(-1,1,-1)$ temos que o vector $(-1,1,-1)$ é gerador do núcleo de g e, porque é um único vector não nulo, é linearmente independente e, consequentemente, uma base do núcleo de g.

Podemos então afirmar que $\dim\operatorname{Nuc} g=1$.

Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, a dimensão do núcleo é zero. Uma vez que, neste caso, a dimensão do núcleo é diferente de zero podemos afirmar que g não é injectiva.

(b) Determinemos $A=\mathcal{M}(g;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ começando por calcular as imagens de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}$ e, seguidamente, escrevendo cada um destes vectores imagem como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}'$:

$g(1,0,0)=(1+0,0+0)=(1,0)=0(0,1)+1(1,0)$

$g(1,1,0)=(1+1,1+0)=(2,1)=1(0,1)+2(1,0)$

$g(1,1,1)=(1+1,1+1)=(2,2)=2(0,1)+2(1,0)$

Dispondo numa matriz, os coeficientes obtidos em cada uma destas combinações lineares, por ordem e por coluna, obtemos a matriz

$$A=\mathcal{M}(g;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}.$$

(c) Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a dimensão do espaço imagem for igual à dimensão do espaço de chegada. Uma vez que o espaço de chegada é $\mathbb{R}^2$ para provarmos que g é sobrejectiva, basta garantir que $\dim\operatorname{Im} g=2$.

i) O Teorema da Dimensão para aplicações lineares afirma que

$$\dim\mathbb{R}^3=\dim\operatorname{Nuc} g+\dim\operatorname{Im} g.$$

Pela alínea a) sabemos que $\dim\operatorname{Nuc} g=1$ e uma vez que $\dim\mathbb{R}^3=3$ concluimos que $\dim\operatorname{Im} g=2$ logo g é sobrejectiva.

ii) A característica da matriz duma aplicação linear dá-nos a dimensão do espaço imagem.
Tomando a matriz A da aplicação linear g, e levando-a à forma de escada, obtemos:

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&2\end{bmatrix}\quad\text{(f.e.)}$$

Logo, $\mathrm{r}(A)=2=\dim\operatorname{Im} g$ e, portanto, g é sobrejectiva.

8. (a) Os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico isto é os valores de x para os quais $|A - xI_3| = 0$.

O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 4 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 2 & -2-x \end{vmatrix} \underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 2 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)\left[(2-x)(-2-x)+0\right] = (2-x)^2(-2-x).$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e -2, com $\text{ma}(2) = 2$ e $\text{ma}(-2) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ (A - 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1/2)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ b = 2c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2c \\ c \end{bmatrix} :\ a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} :\ a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Seja M_{-2} o subespaço próprio de A associado ao valor próprio -2. Tem-se:

$$M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{-2\times 1}(\mathbb{R}) :\ (A + 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A+2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-2)l_2]{(\frac{1}{4})l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{4}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + \frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ a = -c \ \wedge\ b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} :\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :\ c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

9. (a) Consideremos o conjunto dado

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) :\ AX = \alpha X\}.$$

i. Por definição este conjunto é um subconjunto do espaço vectorial $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, isto é,

$$M_\alpha \subseteq \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

ii. $0_{\mathcal{M}_{n\times 1}} \in M_\alpha$ pois $A0_{\mathcal{M}_{n\times 1}} = \alpha 0_{\mathcal{M}_{n\times 1}} = 0_{\mathcal{M}_{n\times 1}}$

iii. Tomemos $X, Y \in M_\alpha$ arbitrários e verifiquemos se $X + Y \in M_\alpha$.

Para que $X + Y \in M_\alpha$ teremos de ter $A(X + Y) = \alpha(X + Y)$, ora

$A(X + Y) =$ (pela distributividade da multiplicação de matrizes em relação à adição)

$AX + AY =$ (porque $X, Y \in M_\alpha$)

$\alpha X + \alpha Y =$ (pela distributividade do produto por um escalar em relação à adição de matrizes)

$= \alpha(X + Y)$.

Logo $X + Y \in M_\alpha$.

iv. Tomemos $X \in M_\alpha$ e $\beta \in \mathbb{K}$ arbitrários e verifiquemos se $\beta X \in M_\alpha$.

$\beta X \in M_\alpha$ se $A(\beta X) = \alpha(\beta X)$. Temos

$A(\beta X) =$ (pelas propriedades do produto por um escalar)

$\beta(AX) =$ (porque $X \in M_\alpha$)

$\beta(\alpha X) =$ (pelas propriedades do produto por um escalar)

$=\alpha(\beta X)$.

Logo $\beta X \in M_\alpha$.

Como se verificam i., ii., iii. e iv. concluimos que M_α é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

(b) Se α é um valor próprio da matriz A então existe pelo menos um vector não nulo $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ tal que $X \in M_\alpha$. Como tal, uma base de M_α será sempre diferente do vazio, (se fosse o vazio a M_α pertenceria apenas o vector nulo) e, portanto $\dim M_\alpha \neq 0$.