Resolução do 2 Teste de 2008/09

1. D.
2. C.
3. C.
4. D.
5. A.
6. C.
7. (a) Determinemos uma base $\mathcal{B}$ de F. Tem-se

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\} \\ & = & \{(b+c,b,c) : b,c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{b(1,1,0) + c(1,0,1) : b,c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \langle (1,1,0),(1,0,1) \rangle . \end{array}$$

Logo a sequência de vectores $((1,1,0),(1,0,1))$ é geradora de F. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; (\alpha+\beta, \alpha, \beta) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = 0$$

donde se conclui pelo critério de independência linear que a sequência $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1))$ é também l.i. e por isso uma base de F.

Vamos agora determinar uma base de G. Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ cujas linhas correspondem a uma sequência geradora de G. Temos

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f.e.$$

Logo, a sequência de vectores $\mathcal{B}' = ((1,-1,2),(0,1,1))$ é uma base de G.

(b) Pela alínea anterior, sabemos que $F + G = \langle (1,1,0),(1,0,1),(1,-1,2),(0,1,1) \rangle$. Consideremos a matriz B cujas linhas correspondem a um sequência geradora de $F + G$. Temos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f.e.$$

Logo, a sequência de vectores $((1,1,0),(0,1,1),(0,0,2))$ é uma base de $F + G$.

(c) Sabemos que a dimensão de um espaço vectorial corresponde ao número de vectores de uma sua base. Assim, atendendo às alíneas anteriores concluímos que $\dim F = 2$, $\dim G = 2$ e $\dim(F+G) = 3$.
Sabemos também que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G + \dim(F \cap G).$$

Logo, $\dim(F \cap G) = 1$.

8. (a) Temos

$$\begin{array}{rcl} Nuc\ f & = & \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & = & \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2a & b-c \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \ \wedge \ b = c\} \\ & = & \{(0,c,c) : c \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

(b) Pela alínea anterior, $Nuc\ f = \{(0,c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,1) \rangle$. Logo, a sequência $((0,1,1))$ é uma sequência geradora do núcleo de f. Como o vector $(0,1,1)$ é não nulo concluímos também que a sequência $((0,1,1))$ é l.i., donde é uma base de $Nuc\ f$. Portanto, $\dim Nuc\ f = 1$. Pelo Teorema da dimensão sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim Nuc\ f + \dim Im\ f$. Consequentemente, obtemos a equação $3 = 1 + \dim Im\ f$, donde $\dim Im\ f = 2$.

(c) Sabemos que a aplicação f é injectiva se e só se $\dim Nuc\ f = 0$. Pela alínea anterior podemos concluir que f não é injectiva.

Sabemos também que a aplicação f é sobrejectiva se e só se $\dim Im\ f = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mas $\dim Im\ f = 2$ e $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, donde concluímos que f não é sobrejectiva.

9. (a) Temos

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Logo, as matrizes não nulas $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ são vectores próprios de A cujos valores próprios correspondentes são 3, -1 e 0.

(b) Sendo A uma matriz de ordem 3 e tendo A 3 vectores próprios linearmente independentes, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, podemos concluir que A é diagonalizável. Portanto, A é semelhante a uma matriz diagonal D da forma $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. Neste caso, uma matriz diagonalizante P é $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ onde cada coluna apresenta um vector próprio associado ao valor próprio na coluna de D correspondente. Assim, tem-se $P^{-1}AP = D$.

10. (a) Seja α um valor próprio de A. Sabemos que então α^2 é valor próprio de A^2. Como A^2 é igual à matriz diagonal $4I_n$ e uma matriz diagonal tem por valores próprios os valores da sua diagonal concluímos que $\alpha^2 = 4$. Portanto, $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$. Logo, $\alpha \in \{-2, 2\}$.

(b) Sabemos que $\alpha \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A se e só se $|A - \alpha I_n| = 0$. Pela alínea anterior, 4 não pode ser valor próprio de A. Logo, $|A - 4I_n| \neq 0$.