

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Sejam $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d' & e' & f' \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Se $|P| = 4$ então $|2P| = 8$.

☐ B $\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ d & e & 4f \\ 6g & 6h & 24i \end{vmatrix} = 24|P|$.

☐ C $\begin{vmatrix} 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 24|P|$.

☐ D $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g & h & i \end{vmatrix} = |P| + |Q|$.

2. Seja (x, y, z) um vector arbitrário do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Considere que $f(x, y, z)$ é a expressão analítica de uma aplicação f do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ no espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $f(x, y, z) = (y, 0)$ então f é linear.
☐ B Se $f(x, y, z) = (0, y^2)$ então f é linear.
☐ C Se $f(x, y, z) = (0, 0)$ então f é linear.
☐ D Se $f(x, y, z) = (x - 1, 0)$ então f não é linear.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b) = (a + b, 2a + b, 3a + b),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\text{Im } f = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle$.
☐ B $\text{Nuc } f = \{(0, 0)\}$.
☐ C $(2, 1, 0) \notin \text{Im } f$.
☐ D f é injectiva mas não é sobrejectiva.

4. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ as aplicações lineares tais que

$$P = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = QP$.
☐ B $g(1, 1, 1) = (0, 3, 0)$.
☐ C $\mathcal{M}(f \circ g; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = PQ$.
☐ D $f(1, 0, 0) = (1, -2, 0)$.

5. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$ e $(1, 2, 3)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 2))$ é base de $\mathbb{R}^3$.
☐ B A sequência $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ é base de $\mathbb{R}^3$.
☐ C A sequência $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$ é linearmente dependente.
☐ D $(1, 2, 2) \in \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.5] (a) Calcule $|A|$ e justifique que A é invertível.
[2.5] (b) Determine A^{-1} utilizando a matriz $\text{adj } A$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.5] (a) Determine os valores próprios de B .
[2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de B . Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.
[1.5] (c) Indique, justificando, se B é diagonalizável.

Mude de Folha

- [2.0] 8. Sejam $A, B, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, com P invertível. Sabendo que

$$B = PAP^{-1}$$

e que X é vector próprio de A associado ao valor próprio α , prove que PX é vector próprio de B .

Fim

1. A

2. B

3. C

4. D

5. A

6. (a) Aplicando o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante, por exemplo, à linha 1 de A , tem-se

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \times (4 \times 3 - 4 \times 2) - 2 \times (1 \times 3 - 4 \times 1) + 2 \times (1 \times 2 - 4 \times 1) = 2.
 \end{aligned}$$

Como $|A| = 2 \neq 0$ concluímos que A é invertível.

(Alternativamente, podíamos obter $|A|$ calculando o determinante de uma matriz A' , obtida a partir de A , efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A|$ com $|A'|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A' seja triangular. Por exemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 1 = 2.$$

(b) Como A é invertível, tem-se

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

7. (a) O polinómio característico de B é

$$\begin{aligned}
 |B - xI_3| &= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} \\
 &= (2-x)[(-x(2-x) + 1)] = (2-x)(x^2 - 2x + 1) = (2-x)(x-1)^2.
 \end{aligned}$$

Os valores próprios de B , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e 1.

(b) Se α é um valor próprio de B sabemos que o subespaço próprio de B associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : BX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (B - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de B associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (B - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(B - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = 0 \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente

independente $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1$.

- Seja M_1 o subespaço próprio de B associado ao valor próprio 1. Tem-se:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (B - 1I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(B - 1I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (f.e.r.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1 pois gera M_1 e é linearmente

independente $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. Tem-se, então, que $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$.

(c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz B seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz B . Pela alínea anterior, temos $\text{mg}(2) + \text{mg}(1) = 2 \neq 3 = \text{ordem de } B$, logo B não é diagonalizável.

8. Como, por hipótese, X é vector próprio de A associado ao valor próprio α , temos que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n \times 1}\}$ são tais que

$$AX = \alpha X.$$

Sabendo que $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é invertível e que $B = PAP^{-1}$, vejamos que PX é vector próprio de B .

- Notemos que $PX \neq 0_{n \times 1}$. De facto, se tivermos $PX = 0_{n \times 1}$, como P é invertível resulta

$$P^{-1}(PX) = P^{-1}0_{n \times 1} \Leftrightarrow X = 0_{n \times 1},$$

o que é uma contradição pois, por hipótese, $X \neq 0_{n \times 1}$.

- $B(PX) = (PAP^{-1})PX = PA(P^{-1}P)X = PAI_nX = PAX = P(AX) = P(\alpha X) = \alpha(PX)$.

Atendendo a que

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad PX \neq 0_{n \times 1} \quad \text{e} \quad B(PX) = \alpha(PX)$$

concluimos que PX é vector próprio de B associado ao valor próprio α .