FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *C*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Recurso – 12 de Fevereiro de 2010

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo:____

____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.			X	
2.		X		
3.		X		
4.	X			
5.		X		

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é FALSA. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$**, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**
- **Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ O elemento da posição $(1, 2)$ da matriz adjunta de A é -1.

$\boxed{\text{B}}$ A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{X}}$ A é uma matriz invertível.

$\boxed{\text{D}}$ Se C tem característica 2 então é equivalente por linhas à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

2. Considere as matrizes $A \xrightarrow[\ell_1+4\ell_3]{} B \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} C$, com $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e com característica 3.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

X Existe uma matriz invertível $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det(AM) = 0$.

C $\det C = -\det A \neq 0$.

D A e B são invertíveis e $B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Um sistema de equações lineares $AX = B$, nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$, tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \beta & 1 \\ 0 & \alpha(\beta-1) & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta^2-1 \end{array}\right]$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é possível determinado.

X Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ então o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 2 e o conjunto de soluções é $\{(1-b, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$.

C Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1$ então o sistema é impossível.

D Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 1.

4. Em $\mathbb{R}^3$, considere a base $\mathcal{B} = ((1,0,2), (0,-1,3), (0,0,2))$ e seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, onde $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}$ representa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

X $f(0,0,1) = (0,0,-1)$.

B $f(0,2,3) = 2f(0,1,0) + 3f(0,0,1)$.

C $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$.

D $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) \mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ um referencial ortonormado directo. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação geral $2x - y + 3z + 4 = 0$, a recta $\mathcal{R}$ que passa pelos pontos $A = (0,1,0)$ e $B = (-2,0,1)$ e o ponto $C = (1,0,-2)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A recta $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.

X O ponto C é um ponto do plano $\mathcal{P}$ e a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C é $3\sqrt{3}$.

C O ângulo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

D A distância da recta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$ é $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de <u>folha</u> sempre que mudar de <u>grupo</u>.

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 0 \wedge b+d = 0\}$ e $G = \langle (1,-1,1,1), (2,1,2,-3) \rangle$. Indique:

[1.0] (a) Uma base de F.

[1.0] (b) Se $(0,-3,0,5) \in G$.

[1.0] (c) Uma base de $F+G$ e a dimensão de $F \cap G$.

Mude de Folha

[1.0] **7.** (a) Indique dois subespaços vectoriais F e G de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, com $F \neq G$ e ambos com dimensão 3.

[1.0] (b) Em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, indique uma matriz A, com $A \neq 0$ e hemi-simétrica e uma matriz B simultaneamente simétrica e hemi-simétrica.

Mude de Folha

8. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine:

[1.0] (a) Os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Os subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Se A é diagonalizável.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 3A$.

[1.0] (a) Se A é invertível determine a sua inversa.

[1.0] (b) Mostre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0,3\}$.

Fim