

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e trinta minutos de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração do Exame: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e considere que

$$Q \xrightarrow{-3l_1} R \xrightarrow{l_1+4l_2} S \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} T.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- [A] Se $T = I_2$ então $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- [B] Se $T = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- [C] Se Q é invertível então $|T| = \frac{1}{3}|Q|$.
- [D] $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q$.

Continua no verso desta folha

2. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ a sequência $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (\alpha, 1, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ B $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 2, 3) \rangle$.
- ☐ C A sequência $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ D $(1, -1, 2) \in \langle (1, 1, 0), (0, -1, 1) \rangle$.

3. Um sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$, tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha + 1 & 1 & \beta - 3 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta - 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é possível determinado.
- ☐ B Se $\alpha = 0$ e $\beta = 3$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(a, -a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ C Se $\alpha = 1$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.
- ☐ D Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 3$ então o sistema é impossível.

4. Considere as matrizes

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A I_3 é a forma de escada reduzida de R .
- ☐ B $|R| = -2$.
- ☐ C $RS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- ☐ D $\hat{R}_{23} = 1$.

5. Seja $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O zero não é valor próprio de P .
- ☐ B A forma de escada reduzida de P é a matriz I_n .
- ☐ C Existe uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$, não nula, tal que $PX = 0_{n \times 1}$.
- ☐ D Se λ é valor próprio de P então a matriz $P - \lambda I_n$ não é invertível.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b & b-c \\ a+c & a+b \end{bmatrix},$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- [1.5] (a) Determine uma base do núcleo de f .
[1.0] (b) Averigüe se $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base da imagem de f .
[1.0] (c) Indique, justificando, se f é injectiva e se f é sobrejectiva.
[1.5] (d) Considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, respectivamente. Determine a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1.0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
[1.0] (b) Indique, caso exista, uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, não nula, tal que $AX = 8X$. Justifique.
[1.5] (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A . Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.
[1.0] (d) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

- [1.0] 8. (a) Seja $s \in \mathbb{R}$ e seja $H \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que, para cada linha i de H , $\sum_{j=1}^n H_{ij} = s$. Mostre que s é valor próprio de H .
Sugestão: Encontre um vector próprio de H .
[2.0] (b) Sendo $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ chamamos *traço* de Q , e representamos por $\text{tr}(Q)$, ao número real definido por $\text{tr}(Q) = \sum_{i=1}^n Q_{ii}$.
Mostre que:
i. Para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tem-se $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
ii. Duas matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

Fim



1. C
2. B
3. C
4. D
5. C
6. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a+b & b-c \\ a+c & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{a+b=0 \wedge b-c=0 \wedge a+c=0 \wedge a+b=0}_{\text{Sistema } AX=0, \text{ nas incógnitas } a, b, c, \text{ a resolver.}} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_4 + (-1)l_1]{l_3 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = -c \wedge b = c\} = \{(-c, c, c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(-1, 1, 1) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Mostrámos que a sequência $((-1, 1, 1))$ gera $\text{Nuc } f$ e, pelo Critério de Independência Linear, também é linearmente independente pois

$$\alpha(-1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0.$$

Logo $((-1, 1, 1))$ é uma base de $\text{Nuc } f$.

(b) Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{f(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b-c \\ a+c & a+b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, pelo Teorema da Dimensão, sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Nuc } f = 1$ concluímos que $\dim \text{Im } f = 2$. Assim, qualquer sequência constituída por 2 vectores de $\text{Im } f$ e linearmente independente é uma base de $\text{Im } f$.

Os vectores

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Im } f$$

e, pelo Critério de Independência Linear, também são linearmente independentes pois

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\text{Im } f$.

- (c) Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo tem dimensão 0. Pela alínea (a) sabemos que $\dim \text{Nuc } f = 1$ logo f não é injectiva.

Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a sua imagem coincide com o conjunto de chegada que, neste caso, é $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Dado que $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Im } f = 2 \neq \dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, concluímos que

$$\text{Im } f \subsetneq \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

pelo que f não é sobrejectiva.

- (d) Como

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ f(0, 1, 1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ f(0, 0, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, temos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 2 & 1-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} \frac{(-1-x)(-1)^{1+1}}{l_1} \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (-1-x) [(1-x)^2 - 2^2] = (-1-x)(-1-x)(3-x). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: -1 e 3 , com $\text{ma}(-1) = 2$ e $\text{ma}(3) = 1$.

- (b) Se existir uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, não nula, tal que $AX = 8X$, então A terá necessariamente o valor próprio 8. Atendendo ao resultado da alínea anterior, concluímos que não existe uma matriz X nestas condições.

- (c) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_{-1} o subespaço próprio de A associado ao valor próprio -1 . Tem-se:

$$M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - (-1)I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : b = -c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -c \\ c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_{-1} pois gera M_{-1} e é linearmente independente (pois $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$). Tem-se, então, que $\text{mg}(-1) = \dim M_{-1} = 2$.

- Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3 . Tem-se:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 3I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{4}l_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 pois gera M_3 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$.

- (d) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Pela alínea anterior, temos

$$\text{mg}(-1) + \text{mg}(3) = 3 = \text{ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos -1 , -1 e 3 na diagonal. Se $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ então considerando,

por exemplo, a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde a segunda coluna é o vector da base de M_3 e a primeira e terceira colunas são os vectores da base de M_{-1} , P é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

8. (a) Dado $s \in \mathbb{R}$, a matriz $H \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tem a particularidade de, para cada linha i de H , $\sum_{j=1}^n H_{ij} = s$, isto é, a soma de todos os elementos da linha i de H é igual a s . Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, se multiplicarmos H pela matriz coluna $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ obtemos uma matriz coluna, de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$, com todas as entradas iguais a s pois

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n H_{1j} \\ \sum_{j=1}^n H_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n H_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix}.$$

Assim, como $s \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n \times 1}\}$ e $HX = sX$, provámos que X é vector próprio de H associado ao valor próprio s e, portanto, s é valor próprio de H .

- (b) i. Sendo $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tem-se $AB \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ e $BA \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Atendendo à definição de traço vem que

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} \quad \text{e} \quad \text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk}.$$

Como

$$\sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m B_{ki} A_{ik} \right) = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk}$$

concluimos, como pretendíamos, que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

- ii. Sejam $R, S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes, isto é, existe $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que $R = P^{-1}SP$. Vejamos que $\text{tr}(R) = \text{tr}(S)$.

Temos $\text{tr}(R) = \text{tr}(P^{-1}SP) = \text{tr}((P^{-1}S)P)$ e, pela alínea anterior, sabemos que

$$\text{tr}((P^{-1}S)P) = \text{tr}(P(P^{-1}S)).$$

Logo

$$\text{tr}(R) = \text{tr}(P(P^{-1}S)) = \text{tr}((PP^{-1})S) = \text{tr}(I_n S) = \text{tr}(S).$$