

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				X
2.			X	
3.		X		
4.				X
5.				X

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é **FALSA**. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com determinante α , com $\alpha \neq 0$. Considere que

$$A \xrightarrow{3l_1} B \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} C.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $\det(2A^3 A^T) = 8\alpha^4$.

☐ B $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

☐ C As matrizes A , B e C têm a mesma característica.

☐ X $\det C = -\frac{1}{3}\alpha$.

2. Um sistema de equações lineares $AX = B$, nas incógnitas x, y, z, w sobre $\mathbb{R}$, tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \beta - 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \beta \end{array} \right], \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$ então o sistema é possível determinado.
☐ B Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.
☐ X Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível indeterminado, com conjunto de soluções

$$\{(2 + 2b, b, -1, 3) : b \in \mathbb{R}\}.$$

- ☐ D Se $\beta = 2$ então o sistema é impossível.

3. Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b + c \wedge d = 0\}$ e $G = \langle (0, 0, 0, 1), (3, 2, 1, 0) \rangle$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$ é uma base de F .
☐ X $(3, 2, 1, -2) \notin G$.
☐ C $\dim(F + G) = 3$.
☐ D $\dim(F \cap G) = 1$ e $(6, 4, 2, 0) \in F \cap G$.

4. Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A B tem o valor próprio 5 (com multiplicidade algébrica 2) e o valor próprio 0 (com multiplicidade algébrica 1).
☐ B B tem característica 2.
☐ C $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de B .
☐ X B é diagonalizável e se $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ então $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ um referencial ortonormado directo. Considere os pontos $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, -1, 3)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Existe um plano contendo os pontos A , B e C e $-4y - 2z + 2 = 0$ é uma equação geral desse plano.
☐ B Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ definem um paralelogramo cuja área é $2\sqrt{5}$.
☐ C A distância do ponto C à recta que passa pelos pontos A e B é $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.
☐ X O ângulo entre os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.
[Cotação]

[1.0] 6. (a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ g & 0 & h & d \\ m & 0 & h & e \\ l & j & k & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Calcule o elemento da posição (4,1) da matriz adjunta de A .

(b) Indique:

[1.0] i. matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ que tenham característica 2 e que não sejam equivalentes por linhas.

[1.5] ii. um subespaço, com dimensão 2, de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e apresente uma base desse subespaço.

Mude de Folha

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (c, a - b, a - b + c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{B} = ((2, 0, 0), (0, 0, -1), (0, 1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

[1.0] (a) Determine o núcleo de f .

[1.0] (b) Mostre que a imagem de f tem dimensão 2 e apresente uma base da imagem de f .

[0.5] (c) Indique a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3)$, isto é, a matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $b.c.\mathbb{R}^3$ (base canónica de $\mathbb{R}^3$).

[1.0] (d) Utilizando matrizes de mudança de base, relacione as matrizes $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c.\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Mude de Folha

8. Seja $(u_1, \dots, u_n)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$. Justifique as seguintes afirmações:

[1.0] (a) Se existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, tais que $u_i = u_j$ então a sequência $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente dependente.

[1.0] (b) Se $(u_1, \dots, u_n)$ é linearmente dependente então, quaisquer que sejam os vectores $v_1, \dots, v_r$ de E , a sequência $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r)$ é linearmente dependente.

Mude de Folha

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = 4I_n$. Mostre que:

[1.0] (a) A é invertível e indique a sua inversa.

[1.0] (b) Se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{-2, 2\}$.

Fim