FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Exame de Época Normal
29 de Janeiro de 2010

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e trinta minutos de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração do Exame: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \big((1,0,1),(0,-1,0),(0,0,1)\big)$ e $\mathcal{B}_2 = \big((-1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\big)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$H = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A f é sobrejectiva.

B $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = H \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

C $f(1,0,1) = (0,2,-3)$.

D $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & b-c \end{bmatrix},$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A f não é sobrejectiva.

B A sequência $(f(1,1,1), f(0,1,1), f(0,0,1))$ é linearmente independente.

C A sequência $(f(1,1,1), f(0,1,1), f(0,0,1))$ gera $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

D $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + \alpha y + z = \beta - 1 \\ x + \alpha y + \beta z = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é impossível.

B Se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(a-b,\, a,\, b) :\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

C Existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 1.

D Se $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ então o sistema tem apenas a solução $(0,1,1)$.

4. Seja $H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $|2H| = 8|H|$.

B $|-H| = -|H|$.

C $\left|\left(H^\top\right)^2 H^{-1}\right| = |H|$.

D $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix} = 6|H|$.

5. Considere as matrizes

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

e seja $Q \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $H_1 Q H_2$ tem característica 3.

B $H_1 H_2 Q = H_2 H_1 Q$.

C $H_3 Q$ é invertível e $(H_3 Q)^{-1} = Q^{-1} {H_3}^{-1}$.

D $|H_1 H_2 H_3 Q| \neq |Q H_3 H_1 H_2|$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Exame de Época Normal
29 de Janeiro de 2010

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere os conjuntos

$$F = \left\langle (1,-1,1,2), (0,0,1,0), (1,-1,0,2) \right\rangle$$

e

$$G = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a+b=0 \ \wedge \ b+c=0 \right\}.$$

[1.5] (a) Mostre que G é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

[1.5] (b) Determine uma base de G.

[1.5] (c) Mostre que $\dim(F+G)=3$ e indique, justificando, uma base de $F+G$.

[1.0] (d) Sem determinar $F \cap G$ indique, justificando, $\dim(F \cap G)$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

[0.5] (a) Sem calcular os valores e vectores próprios de A, averigúe se $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A.

[1.0] (b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1.5] (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A. Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

[1.0] (d) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

8. Seja $H \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que:

[1.0] (a) Se H é diagonalizável então H e $H^\top$ são matrizes semelhantes.

[2.0] (b) Se $H^2 + 2H = 3I_n$ e α é valor próprio de H então $\alpha \in \{-3, 1\}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2010

Uma resolução com notas explicativas

1. B

2. C

3. C

4. D

5. D

6. (a) Verifiquemos que $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b=0 \wedge b+c=0\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

. $G \subseteq \mathbb{R}^4$, pela definição de G.

. $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in G$ porque $0+0=0$ e $0+0=0$.

. Sejam $X=(a,b,c,d), Y=(a',b',c',d') \in G$. Vejamos que $X+Y \in G$.
Dado que $X,Y \in G$ tem-se $a+b=0$, $b+c=0$, $a'+b'=0$ e $b'+c'=0$. Como

$$X+Y=(a+a',b+b',c+c',d+d') \quad \text{e} \quad \begin{cases} (a+a')+(b+b')=(a+b)+(a'+b')=0+0=0 \\ (b+b')+(c+c')=(b+c)+(b'+c')=0+0=0 \end{cases},$$

concluímos que $X+Y \in G$.

. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X=(a,b,c,d) \in G$. Vejamos que $\alpha X \in G$.
Dado que $X \in G$ tem-se $a+b=0$ e $b+c=0$. Como

$$\alpha X = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \quad \text{e} \quad \begin{cases} \alpha a + \alpha b = \alpha(a+b) = \alpha 0 = 0 \\ \alpha b + \alpha c = \alpha(b+c) = \alpha 0 = 0 \end{cases},$$

concluímos que $\alpha X \in G$.

Logo G é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Comecemos por determinar uma sequência de vectores geradora de

$$G = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{a+b=0 \quad \wedge \quad b+c=0}_{\text{Sistema } AX=0\text{, nas incógnitas a,b,c,d, a resolver.}} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{l_1+(-1)l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a=c \wedge b=-c\} = \{(c,-c,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c,-c,c,0)+(0,0,0,d) : c,d \in \mathbb{R}\} = \{c(1,-1,1,0)+d(0,0,0,1) : c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\langle (1,-1,1,0),(0,0,0,1) \right\rangle. \end{aligned}$$

Mostrámos que a sequência $\big((1,-1,1,0),(0,0,0,1)\big)$ gera G e, pelo Critério de Independência Linear, também é linearmente independente pois

$$\alpha(1,-1,1,0)+\beta(0,0,0,1)=(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

Logo $\big((1,-1,1,0),(0,0,0,1)\big)$ é uma base de G.

(c) Dado que $F = \big\langle (1,-1,1,2),(0,0,1,0),(1,-1,0,2) \big\rangle$ e $G = \big\langle (1,-1,1,0),(0,0,0,1) \big\rangle$ sabemos que

$$F+G = \Big\langle (1,-1,1,2),(0,0,1,0),(1,-1,0,2),(1,-1,1,0),(0,0,0,1) \Big\rangle .$$

Determinemos uma sequência geradora, linearmente independente, de $F+G$.

Cálculo auxiliar:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4+(-1)l_1]{l_3+(-1)l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_5+\frac{1}{2}l_4]{l_3+l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(f.e.)}.$$

Temos

$$F+G = \Big\langle (1,-1,1,2),(0,0,1,0),(0,0,0,-2) \Big\rangle$$

e, como as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes, concluímos que

$$S = \Big((1,-1,1,2),(0,0,1,0),(0,0,0,-2) \Big)$$

é uma sequência linearmente independente. Como S gera $F+G$ e é linearmente independente, constitui uma base de $F+G$. Logo $\dim(F+G)=3$.

(d) Como $\dim(F+G)=3$ e $\dim G = 2$, para determinar $\dim(F\cap G)$ basta calcular primeiro $\dim F$ pois

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G). \tag{1}$$

Dado que $F = \big\langle (1,-1,1,2),(0,0,1,0),(1,-1,0,2) \big\rangle$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\big((1,-1,1,2),(0,0,1,0)\big)$ é uma base de F, pelo que $\dim F = 2$.
Atendendo a (1), concluímos que $\dim(F\cap G)=1$.

7. (a) Dado que $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, sabemos que uma matriz coluna X, <u>não nula</u>, de $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$ é vector próprio de A, associado ao valor próprio λ, se $AX = \lambda X$. Como

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3\times1}\} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

(b) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \underset{l_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (2-x)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)\left[(1-x)^2 - 1\right] = (2-x)(-x)(2-x). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 2, com $\text{ma}(0) = 1$ e $\text{ma}(2) = 2$.

(c) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}):\ AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}):\ (A-\alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ (A - 0I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ a = -b \ \wedge\ c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1$.

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ (A - 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) :\ a = b \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ c \end{bmatrix} :\ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} :\ b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :\ b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente independente (pois $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$). Tem-se, então, que $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$.

(d) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Pela alínea anterior, temos

$$\text{mg}(0) + \text{mg}(2) = 3 = \text{ ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 0, 2 e 2 na diagonal. Por exemplo, se considerarmos a matriz

$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ então a matriz $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a primeira coluna é o vector da base de M_0 e a segunda e terceira colunas são os vectores da base de M_2, é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

8. (a) Se H é diagonalizável então, por definição, H é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é, existe uma matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $Q^{-1}HQ = D$. Desta igualdade resulta $\left(Q^{-1}HQ\right)^\top = D^\top$, ou equivalentemente, $Q^\top H^\top \left(Q^\top\right)^{-1} = D$. Como

$$Q^{-1}HQ = D \qquad \text{e} \qquad Q^\top H^\top \left(Q^\top\right)^{-1} = D$$

obtemos

$$Q^{-1}HQ = Q^\top H^\top \left(Q^\top\right)^{-1}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior, à esquerda por Q e à direita por Q^{-1}, obtemos

$$H = QQ^\top H^\top \left(Q^\top\right)^{-1} Q^{-1},$$

o que equivale a

$$H = QQ^\top H^\top \left(QQ^\top\right)^{-1}.$$

Logo H e $H^\top$ são matrizes semelhantes.

(b) Se α é valor próprio de H então existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$ tal que $HX = \alpha X$. Dado que $H^2 + 2H - 3I_n = 0$, multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por X obtemos

$$\left(H^2 + 2H - 3I_n\right) X = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} 0 &= \left(H^2 + 2H - 3I_n\right) X \\ &= H^2X + 2HX - 3X \\ &= H(HX) + 2HX - 3X \\ &= H(\alpha X) + 2\alpha X - 3X \\ &= \alpha HX + 2\alpha X - 3X \\ &= \alpha(\alpha X) + 2\alpha X - 3X \\ &= \alpha^2 X + 2\alpha X - 3X \\ &= \left(\alpha^2 + 2\alpha - 3\right) X, \end{aligned}$$

atendendo a que $X \neq 0_{n\times 1}$ (pois X é vector próprio de H) resulta que $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$ e, portanto, $\alpha \in \{-3, 1\}$.