FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *C*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Primeiro Teste – 28 de Novembro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo: ____

____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				X
2.			X	
3.				X
4.		X		
5.				X

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é FALSA. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 2 horas.**

---

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $AB \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{3\,3} = -10$.

[B] A forma de escada reduzida de A é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[C] A matriz $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ está em forma de escada e é equivalente por linhas a B.

[X] A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A tem característica 2.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a forma de escada reduzida de A.

$\boxed{\text{X}}$ $A \cdot \operatorname{adj} A \neq 0$.

$\boxed{\text{D}}$ O elemento da posição $(2,3)$ da matriz $\operatorname{adj} A$ é -2.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha)x_3 - \beta x_4 = -\beta \\ \alpha x_1 + (2\alpha)x_2 - \beta x_4 = 1 - \beta \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = \beta$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível ou possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 0$ então, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é impossível.

$\boxed{\text{X}}$ Se $\alpha = \beta = 1$ então o conjunto das soluções do sistema é

$$\{(-2 + 4\alpha_3 + \alpha_4, 1 + 2\alpha_3, \alpha_3, \alpha_4) : \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}.$$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $\det A = r \neq 0$ e $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det B = s$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = -2r$.

$\boxed{\text{X}}$ $\begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ i & c & f \end{vmatrix} = -r$.

$\boxed{\text{C}}$ A é invertível e $\det(A^{-1})^2 = \frac{1}{r^2}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\det(2AB) = 8rs$.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível então a sua transposta também é invertível.

$\boxed{\text{B}}$ $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível se, e só se, a forma de escada reduzida de A é I_n.

$\boxed{\text{C}}$ Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são simétricas então $A + B$ é simétrica.

$\boxed{\text{X}}$ Quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se A e B são simétricas então AB é simétrica.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.5] (a) Calcule a característica e o determinante de A.

[1.5] (b) Justifique que A é invertível e determine A^{-1}.

Mude de Folha

[2.0] **7.** Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Considere $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} B \xrightarrow[2l_2]{} C$. Indique matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = C$.

Mude de Folha

[2.0] **8.** Indique matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, ambas com característica 2 e em forma de escada, que não sejam equivalentes por linhas. Justifique.

Mude de Folha

[2.0] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $(A^\top A)^\top + I_n = 0_{n\times n}$. Mostre que n é par e que $\det A \in \{-1, 1\}$.

Mude de Folha

10. Sejam $A, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 - 3A = I_n$ e $CA^2 = I_n$. Mostre que:

[1.0] (a) C é invertível e $C^{-1} = A^2$;

[1.0] (b) $A - 3I_n = CA$.

Fim