FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica D

Primeiro Teste – 21 de Novembro de 2009

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$**, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Seja $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica

$$P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b \\ a+b \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A. A matriz P pode decompor-se no seguinte produto de matrizes elementares:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

B. A matriz P pode decompor-se no seguinte produto de matrizes elementares:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

C. A matriz P pode decompor-se no seguinte produto de matrizes elementares:
$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

D. A matriz P pode decompor-se no seguinte produto de matrizes elementares:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Continua no verso desta folha

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + (\beta + 2)y + z = \alpha + 1 \\ x + y + (\alpha + 2)z = \beta \end{cases} .$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq -1$ então o sistema é possível determinado.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta = -1$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(3, \lambda, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = -1$ e $\beta = -1$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta = -1$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

3. Considere as matrizes

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A entrada $(1, 3)$ da matriz Q^2 é igual a 0.

$\boxed{\text{B}}$ $(QP)^\top \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ e a entrada $(4, 3)$ de $(QP)^\top$ é igual a -1.

$\boxed{\text{C}}$ Para qualquer matriz $H \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tem-se $(H + Q)^2 = H^2 + 2HQ + Q^2$.

$\boxed{\text{D}}$ $PP^\top$ é uma matriz simétrica.

4. Seja $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+2 & c & d \\ a & a & a+3 & e \\ a & a & a & a+4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $|P| = 24$.

$\boxed{\text{B}}$ P é invertível e $\left|-2P^\top P^{-1}\right| = 2^4$.

$\boxed{\text{C}}$ $\widehat{P}_{34} = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Pode existir uma matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que QP tem característica inferior a 4.

5. Sejam $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que P é simétrica e Q é hemi–simétrica.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $PQ + QP$ é hemi–simétrica.

$\boxed{\text{B}}$ Se P é invertível então P^{-1} pode não ser simétrica.

$\boxed{\text{C}}$ Q^2 é simétrica.

$\boxed{\text{D}}$ $PQ - QP$ é simétrica.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Primeiro Teste – 21 de Novembro de 2009

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Calcule $|A|$ e justifique que A é invertível. Qual o determinante de A^{-1}?

[2.0] (b) Exprima A^{-1} como produto de matrizes elementares.

Mude de Folha

7. (a) Indique, caso existam, exemplos de matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ tais que:

[1.0] i. A e B têm característica 2 e não são equivalentes por linhas. Justifique.

[1.0] ii. A e B têm característica 3 e não são equivalentes por linhas. Justifique.

[2.5] (b) Justifique que $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é invertível e determine M^{-1}.

Mude de Folha

[1,0] **8.** (a) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis.
Prove que AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

[2,0] (b) Considere a matriz $H = \begin{bmatrix} A_{11}+\alpha_1 & \cdots & A_{1n}+\alpha_n \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$.

Prove que $|H| = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *D*

Primeiro Teste – 21 de Novembro de 2009

Uma resolução com notas explicativas

1. A

2. B

3. C

4. D

5. B

6. (a) Como o determinante do produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes das matrizes envolvidas, tem-se

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 5 = -5.$$

Dado que $|A| \neq 0$ concluímos que A é invertível. Como $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ resulta que $|A^{-1}| = -\frac{1}{5}$.

(b) Dado que A é invertível e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$A^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes elementares e que a inversa de uma matriz elementar é ainda uma matriz elementar, exprimimos A^{-1} como produto de matrizes elementares.

7. (a) Sabemos que duas matrizes $m \times n$ são equivalentes por linhas se, e só se, têm a mesma forma de escada reduzida.

i. Por exemplo, as matrizes 4×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

estão em forma de escada reduzida, têm ambas característica 2 e não são equivalentes por linhas.

ii. Notemos que qualquer matriz 4×3 com característica 3 é equivalente por linhas à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que está em forma de escada reduzida. Logo não existem matrizes 4×3, com característica 3, que não sejam equivalentes por linhas.

(b) Como

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+2l_1]{l_2+(-1)l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\mathrm{r}(M) = 3 =$ ordem de M. Logo M é uma matriz invertível. Abreviadamente, vamos determinar M^{-1} fazendo $[M \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid M^{-1}]$.

$$[M \mid I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+2l_1]{l_2+(-1)l_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-3)l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1+l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 \mid M^{-1}].$$

Logo

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Como

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

concluímos que AB é invertível e que $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB.

(b) Mostremos que

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}+\alpha_1 & \cdots & A_{1n}+\alpha_n \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{H} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{A} + \det \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{B}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha 1 de H obtemos

$$\begin{aligned} \det H &= (A_{11}+\alpha_1)\widehat{H}_{11} + \cdots + (A_{1n}+\alpha_n)\widehat{H}_{1n} \\ &= (A_{11}\widehat{H}_{11} + \cdots + A_{1n}\widehat{H}_{1n}) + (\alpha_1\widehat{H}_{11} + \cdots + \alpha_n\widehat{H}_{1n}). \end{aligned}$$

Como as matrizes H, A e B só diferem na linha 1 temos

$$\begin{aligned} \det H &= (A_{11}\underbrace{\widehat{H}_{11}}_{\widehat{A}_{11}} + \cdots + A_{1n}\underbrace{\widehat{H}_{1n}}_{\widehat{A}_{1n}}) + (\alpha_1\underbrace{\widehat{H}_{11}}_{\widehat{B}_{11}} + \cdots + \alpha_n\underbrace{\widehat{H}_{1n}}_{\widehat{B}_{1n}}) \\ &= \det A + \det B, \end{aligned}$$

como pretendíamos provar.