FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica *C*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segundo Teste – 16 de Janeiro de 2010

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome Completo:____

____

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				X
2.			X	
3.	X			
4.		X		
5.		X		

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é FALSA. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 2 horas.**

1. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços $F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b - c\}$, $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0 \wedge b = c\}$ e $H = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2c \wedge b = c\}$,

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $((1,1,0), (-1,0,1))$ é uma base de F.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim H = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $F + H = \langle (1,1,0), (-1,0,1), (2,1,1) \rangle$.

$\boxed{\text{X}}$ $G = \langle (0,1,1) \rangle$ e $\dim(F + G) \neq \dim F$.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ e $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_3, 2e_2, -3e_4)$ bases de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Em relação à base $\mathcal{B}$, a sequência das coordenadas do vector $u = e_1 - 2e_3 + e_4$ é $(1, 0, -2, 1)$.

$\boxed{\text{B}}$ O vector que, em relação à base $\mathcal{B}'$, tem a sequência de coordenadas $(2, 0, 1, 2)$ é o vector $v = 2e_1 - 6e_4$.

$\boxed{\text{X}}$ Existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_E$.

$\boxed{\text{D}}$ $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle e_1 - e_2, 2e_3, 3e_2 \rangle$.

3. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b, c) = (a - b, c)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $g(0, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{X}}$ $\operatorname{Nuc} f = \langle (1, -1, 0) \rangle$.

$\boxed{\text{B}}$ $g(a, b) = \begin{bmatrix} a & -2b \\ 0 & a + b \end{bmatrix}$, para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{C}}$ f é sobrejectiva mas não é injectiva.

$\boxed{\text{D}}$ Se $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear sobrejectiva então $\dim \operatorname{Nuc} h = 1$.

4. Sejam $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 2, -1), (0, 0, 3))$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}' = ((0, -1), (1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $b.c._{\mathbb{R}^2}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^2}) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}', b.c._{\mathbb{R}^2})\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$\boxed{\text{X}}$ $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}', b.c._{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; b.c._{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(1, 1, 0) = (4, -2)$.

$\boxed{\text{D}}$ $f(0, 0, 6) = 2f(0, 0, 3) = (-4, 0)$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A matriz A tem o valor próprio 3 (com multiplicidade algébrica 2) e o valor próprio 0 (com multiplicidade algébrica 1).

$\boxed{\text{X}}$ 3 é um valor próprio de A com multiplicidade geométrica 1.

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 3.

$\boxed{\text{D}}$ A tem o valor próprio 0 e portanto A não é invertível.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[1.5] **6.** (a) Indique três espaços vectoriais de dimensão 3, distintos de $\mathbb{R}^3$.

[1.5] (b) Indique um subespaço F de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tenha dimensão 2 e apresente uma base de F.

Mude de Folha

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c,d) = (a-b, c, a-b+c),$$

para qualquer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Determine:

[1.0] (a) $\operatorname{Nuc} f$.

[1.0] (b) Uma base de $\operatorname{Im} f$.

[1.0] (c) Se f é sobrejectiva e se f é injectiva.

Mude de Folha

8. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\-2\end{bmatrix} \text{ e } A\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Justifique que A é diagonalizável.

[1.5] (b) Indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2.0] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^3 = A^2$. Mostre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0,1\}$.

Fim