

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinala-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,8 valores;
- Se responder erradamente: -0,6 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$H = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é FALSA. Indique qual é.

☐ A f não é injectiva.

☐ B $f(1, 2, 3) = (2, 7, 8)$.

☐ C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

☐ D $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vectoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 0, 3) \rangle.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Uma base de G é $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$.
- ☐ B $(0, 0, 8) \in F \cap G$.
- ☐ C $F \cup G$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ D $G = \langle (1, 0, 1), (2, 0, 0) \rangle$.

3. Sejam E e E' espaços vectoriais reais de dimensão finita, $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear e $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de E .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\text{Im } f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle$.
- ☐ B Se $\dim E' < \dim E$ e f é sobrejectiva então f não é injectiva.
- ☐ C Se f é injectiva então a sequência $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ é linearmente dependente.
- ☐ D Para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tem-se $f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)$.

4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $F_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = c\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ B $F_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 0\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.
- ☐ C $F_3 = \{H \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R}) : H \text{ é invertível}\}$ não é subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$.
- ☐ D $F_4 = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : b + c = 5\}$ não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.

5. Seja E um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3, e_4) uma base de E . Seja w um vector de E .

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A A sequência (e_1, e_2, e_3, e_4, w) é geradora de E .
- ☐ B A sequência (e_1, e_2, e_3) não é linearmente independente.
- ☐ C $E = \langle e_1, e_4, 5e_2, e_2 + e_3 \rangle$.
- ☐ D O vector w escreve-se, de forma única, como combinação linear dos vectores da sequência (e_1, e_2, e_3, e_4) .

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + c, a + b + 2c + d, a + b + 2c + d),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- [1.5] (a) Determine uma base do núcleo de f .
 [1.5] (b) Indique, justificando, se f é injectiva e se f é sobrejectiva.
 [1.5] (c) Considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$$

de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Determine a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
 [1.5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A . Indique a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.
 [1.0] (c) Indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

8. Seja $H \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e suponhamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $H^p = 0$. Mostre que:

- [1.0] (a) H tem apenas o valor próprio zero.
 [1.0] (b) Se H é diagonalizável então H é a matriz nula.
 [1.0] (c) Se H não é a matriz nula então $I_n - H$ não é diagonalizável.

Fim



1. D
2. C
3. C
4. B
5. B
6. (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : (a + c, a + b + 2c + d, a + b + 2c + d) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \underbrace{a + c = 0 \wedge a + b + 2c + d = 0 \wedge a + b + 2c + d = 0}_{\text{Sistema } AX = 0, \text{ nas incógnitas } a, b, c, d, \text{ a resolver.}} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3 + (-1)l_1]{l_2 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-1)l_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{Nuc } f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = -c \wedge b = -c - d \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c & -c - d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -c & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -d \\ 0 & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

A sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\text{Nuc } f$ porque gera $\text{Nuc } f$ e é linearmente independente (basta notar que $\alpha \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).

- (b) Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo tem dimensão 0. Pela alínea anterior $\dim \text{Nuc } f = 2$ logo f não é injectiva.

Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a sua imagem coincide com o conjunto de chegada. Dado que $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, pelo Teorema da Dimensão, sabemos que

$$\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Como $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Nuc } f = 2$ concluímos que

$$\dim \text{Im } f = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Como $\text{Im } f \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\dim \text{Im } f < \dim \mathbb{R}^3$ concluímos que $\text{Im } f \subsetneq \mathbb{R}^3$. Logo f não é sobrejectiva.

(c) Como

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (1, 1, 1) = \mathbf{1}(1, 1, 1) + \mathbf{0}(0, 1, 1) + \mathbf{0}(0, 0, 1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (0, 1, 1) = \mathbf{0}(1, 1, 1) + \mathbf{1}(0, 1, 1) + \mathbf{0}(0, 0, 1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= (1, 2, 2) = \mathbf{1}(1, 1, 1) + \mathbf{1}(0, 1, 1) + \mathbf{0}(0, 0, 1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= (0, 1, 1) = \mathbf{0}(1, 1, 1) + \mathbf{1}(0, 1, 1) + \mathbf{0}(0, 0, 1) \end{aligned},$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, temos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} -1-x & 2 & 4 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -2 & 1 & 5-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (1-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1-x & 4 \\ -2 & 5-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)[(-1-x)(5-x) - (-2 \times 4)] = (1-x)(x^2 - 4x + 3) = \\ &= (1-x)(x-3)(x-1). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 1 e 3, com $\text{ma}(1) = 2$ e $\text{ma}(3) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

• Seja M_1 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1. Tem-se:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 1I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} (A - 1I_3|0) &= \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}l_1 \\ -1l_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = 2c \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1 pois gera M_1 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$.

- Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3. Tem-se:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 3I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 3I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-\frac{1}{2})l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{4}l_1 \\ -\frac{1}{2}l_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = c \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 pois gera M_3 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 1$.

- (c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Pela alínea anterior, temos

$$\text{mg}(1) + \text{mg}(3) = 2 \neq 3 = \text{ordem de } A,$$

logo A não é diagonalizável.

8. (a) Dado que, por hipótese, $H^p = 0$, temos $|H^p| = 0$. Como $|H^p| = |H|^p$ concluimos que $|H| = 0$ e, portanto, o zero é valor próprio de H . Vejamos que zero é o único valor próprio de H .
Sejam α um valor próprio de H e X um vector próprio de H associado a α . Tem-se $HX = \alpha X$ e, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k X = \alpha^k X.$$

(Provamos, facilmente, este último resultado por indução em k . Para $k = 1$ o resultado é verdadeiro e, assumindo o resultado válido para k , temos que $H^{k+1}X = (HH^k)X = H(H^kX) = H(\alpha^k X) = \alpha^k(HX) = \alpha^k(\alpha X) = (\alpha^k\alpha)X = \alpha^{k+1}X$.)

Assim, em particular, para $k = p$ tem-se $H^p X = \alpha^p X$ e, como por hipótese, $H^p = 0$, resulta que $\alpha^p X = 0$. Atendendo a que $X \neq 0_{n \times 1}$ (pois X é vector próprio de H) resulta que $\alpha^p = 0$ e, portanto, $\alpha = 0$.

Logo H só tem o valor próprio zero.

- (b) Se H é diagonalizável então, por definição, H é semelhante a uma matriz diagonal D , isto é, existe uma matriz invertível $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que $Q^{-1}HQ = D$. Como matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico concluimos que, neste caso, D é a matriz nula. Assim, de

$$Q^{-1}HQ = 0$$

resulta

$$Q(Q^{-1}HQ)Q^{-1} = Q0Q^{-1} = 0,$$

isto é, $H = 0$.

- (c) Suponhamos que H não é a matriz nula. Então, pela alínea anterior, H não é diagonalizável, isto é, para qualquer matriz invertível Q , a matriz $Q^{-1}HQ$ não é diagonal.

Como para qualquer matriz invertível Q se tem

$$Q^{-1}(I_n - H)Q = Q^{-1}I_nQ - Q^{-1}HQ = I_n - Q^{-1}HQ$$

e $Q^{-1}HQ$ não é diagonal, então a matriz

$$I_n - Q^{-1}HQ$$

também não é diagonal e, como Q é qualquer matriz invertível $n \times n$, mostramos que $I_n - H$ não é diagonalizável.