FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame de Época de Recurso – 9 de Fevereiro de 2011

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Justifique que A é invertível e determine a forma de escada reduzida de A.

[1,0] (b) Sabendo que $\widehat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & a \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz dos complementos algébricos de A, determine os valores de a e b.

[1,5] (c) Calcule o determinante de A e, utilizando a adjunta de A, determine A^{-1}.

[1,5] (d) Determine a solução do sistema $AX = B$ usando a inversa da matriz simples do sistema.

Mude de Folha

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad g(a,b,c) = (a+b, 2b-a, 0).$$

[1,5] (a) Determine uma base do núcleo de g

[1,0] (b) Determine a dimensão do subespaço $\mathrm{Im} g$.

[1,0] (c) Indique, justificando, se g é injectiva ou se é sobrejectiva.

[2,0] (d) Considere as bases de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,1,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$. Determine, indicando todos os cálculos efectuados, $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio -1 e indique a multiplicidade geométrica deste valor próprio.

[1,0] (c) Verifique que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A e indique a que valor próprio está associado.

[1,0] (d) Sabendo que -2 é valor próprio de A e que $\mathrm{mg}(-2) = 1$ conclua, justificando, que A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal semelhante a A.

[1,0] (e) Indique, justificando, uma matriz diagonalizante P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$. Mostre que:

[1,0] (a) Se A tem duas linhas iguais então $|A| = 0$.

[1,5] (b) Se i e j são duas linhas distintas de A então

$$a_{i1}\widehat{A}_{j1} + a_{i2}\widehat{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\widehat{A}_{jn} = 0.$$

[1,5] (c) $A.\operatorname{adj} A = |A| I_n$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica C

Exame de Época de Recurso – 9 de Fevereiro de 2011

Uma resolução com notas explicativas

---

1. (a) Para verificarmos que a matriz A é invertível calculemos o seu determinante. Pelo Teorema de Laplace aplicado à coluna 3 vem:

$\det A = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Portanto A é invertível e consequentemente a sua forma de escada reduzida é a matriz identidade I_3.

(b) Temos

$$a = \hat{A}_{23} = (-1)^{2+3}\det A(2|3) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

e

$$b = \hat{A}_{31} = (-1)^{3+1}\det A(3|1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

(c) Na alínea a) vimos que $\det A = -1$. Como sabemos que $\operatorname{adj} A = \widehat{A}^\top$ então

$$\operatorname{adj} A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente poderiamos ter calculado o determinante de A através da sua adjunta da seguinte forma.

Da igualdade

$$A.\mathrm{adj}A = |A| I_n$$

resulta que a matriz $A.\mathrm{adj}A$ é uma matriz diagonal com todas as entradas da diagonal iguais a $|A|$. Ora, temos

$$A.\mathrm{adj}A = A\hat{A}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo $\det A = -1$.

Calculemos a matriz inversa de A através da sua matriz adjunta. Temos

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Usando o facto de que existe A^{-1}, a matriz inversa de A, a solução do sistema é assim obtida:

$$\begin{aligned} AX = B \quad &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. (a) Determinemos uma sequência geradora de $\operatorname{Nuc} g$. Temos

$$\begin{aligned}(a,b,c)\in \operatorname{Nuc} g &\Leftrightarrow g(a,b,c)=(0,0,0)\Leftrightarrow (a+b,2b-a,0)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow a+b=0\ \wedge\ 2b-a=0 \Leftrightarrow a=-b\ \wedge\ b=0\\ &\Leftrightarrow a=0\ \wedge\ b=0\ \wedge\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (a,b,c)=(0,0,c)=c(0,0,1),\ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Donde $\operatorname{Nuc} g = \langle(0,0,1)\rangle$. A sequência geradora do $\operatorname{Nuc} g$, $((0,0,1))$, é constituída por um único vector, como esse vector é não nulo, concluímos que é linearmente independente e que, portanto, é uma base de $\operatorname{Nuc} g$.

(b) Pela alínea anterior temos $\dim \operatorname{Nuc} g = 1$. Aplicando o Teorema da Dimensão, obtemos

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} g + \dim \operatorname{Im} g,\ \text{ou seja},\ 3 = 1+\dim \operatorname{Im} g.$$

Portanto $\dim \operatorname{Im} g = 2$.

(c) Dado que

$\operatorname{Nuc}\ g=\langle(0,0,1)\rangle \neq \{(0,0,0)\}$ concluímos que g não é injectiva.

Como $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ e

$\dim \operatorname{Im} g = 2\neq 3=\dim\mathbb{R}^3$ vem que $\operatorname{Im}\ g\neq\mathbb{R}^3$, o que nos permite concluir que g não é sobrejectiva.

(d) Calculemos as imagens dos vectores da base $\mathcal{B}$ e determinemos as coordenadas dessas imagens na base $\mathcal{B}'$. Temos

$$\begin{array}{rclcl} g(1,0,1) &=& (1,-1,0) &=& 0(0,0,1)+(-1)(0,1,0)+1(1,0,0)\\ g(1,1,1) &=& (2,1,0) &=& 0(0,0,1)+1(0,1,0)+2(1,0,0)\\ g(0,0,1) &=& (0,0,0) &=& 0(0,0,1)+0(0,1,0)+0(1,0,0).\end{array}$$

Dispondo, numa matriz, por ordem e por colunas, as coordenadas obtidas vem

$$\mathcal{M}(g;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

3. (a) Os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico $|A-\lambda I_3|$.

Assim temos

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix}-1-\lambda&1&-2\\0&-2-\lambda&2\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2-\lambda&2\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-1-\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2).\end{aligned}$$

Deste modo, o conjunto dos valores próprios de A é $\{-1,-2\}$. Dado que -2 e -1 são, respectivamente, raízes simples e dupla do polinómio característico, temos que a multiplicidade algébrica do valor próprio -2 é 1, $\operatorname{ma}(-2)=1$, e do valor próprio -1 é 2, $\operatorname{ma}(-1)=2$.

(b) Para determinar o subespaço próprio associado ao valor próprio -1, M_{-1}, é necessário resolver o sistema $(A+I_3)X=0$. Assim temos

$$A+I_3=\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[l_2+l_1]{}\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

O sistema é então equivalente a

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vem então que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto o subespaço próprio associado ao valor próprio -1 é

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

concluimos que os vectores são linearmente independentes e que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base de M_{-1}. Assim, $\mathrm{mg}(-1) = \dim M_{-1} = 2$.

(c) Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -2.

(d) Dado sabermos que $\mathrm{mg}(-2) = 1$ e $\mathrm{mg}(-1) = 2$, vem

$$\mathrm{mg}(-1) + \mathrm{mg}(-2) = 2 + 1 = 3 = n.$$

Logo A é diagonalizável. Uma matriz diagonal semelhante a A será uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os valores próprios de A, ocorrendo cada um deles tantas vezes quanto a sua respectiva multiplicidade algébrica. Assim, por exemplo, a matriz

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz diagonal semelhante a A.

(e) Uma matriz diagonalizante P nas condições pedidas é uma matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cujas colunas correspondem aos vectores próprios associados as valores próprios $-2, -1$ e -1, respectivamente. Assim podemos considerar, por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Observemos que esta matriz resulta de considerar a base de $\mathcal{M}_{3\times 1}$ dada pela sequência de vectores próprios

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Devemos referir que a ordem que os vectores têm na sequência e nas colunas da matriz é a ordem pela qual os correspondentes valores próprios aparecem na diagonal da matriz $P^{-1}AP$, isto é, a coluna i de P corresponde ao vector próprio associado ao valor próprio que está na coluna i de $P^{-1}AP$.

4. (a) Suponhamos que a matriz A tem as linhas i e j iguais, com $i \neq j$. Fazendo em A a transformação elementar $L_j - L_i$, obtemos uma matriz B cujo determinante é igual ao de A. Ora, dado que a matriz B tem a linha j nula, concluímos que tem determinante igual a zero. Portanto $|A| = 0$.

(b) Para $i \neq j$, o elemento (i, j) da matriz $A\mathrm{adj}A$ é

$$a_{i1}\hat{A}_{j1} + a_{i2}\hat{A}_{j2} + \ldots + a_{in}\hat{A}_{jn}.$$

Pelo teorema de Laplace, tal expressão é igual ao determinante da matriz que se obtém de A substituíndo a linha j por uma linha igual à linha i. Como tal matriz tem duas linhas iguais (as linhas i e j), pela alínea a), o seu determinante é zero. Assim

$$a_{i1}\hat{A}_{j1} + a_{i2}\hat{A}_{j2} + \ldots + a_{in}\hat{A}_{jn} = 0,$$

para $i \neq j$.

(c) Temos

$$(A\mathrm{adj}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\hat{A}^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\hat{A}_{jk}.$$

Então, se $i = j$, vem

$$(A\mathrm{adj}A)_{ij} = (A\mathrm{adj}A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\hat{A}_{ik} = |A|.$$

Se, por outro lado, $i \neq j$ temos

$$(A\mathrm{adj}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\hat{A}_{jk} = 0,$$

sendo que a última igualdade é consequência da alínea b).

Portanto provámos que a matriz $A\mathrm{adj}A$ é a matriz escalar $|A|I_n$.